

# 珠心算过程的眼动和认知研究

尹文刚<sup>1</sup> 舒 华<sup>2</sup> 蒋志峰<sup>3</sup> 吴 迪<sup>2</sup>

(1 中国科学院心理研究所心理健康重点实验室, 北京 100101) (2 北京师范大学心理学系, 北京 100871)  
(3 中央教育科学研究所, 北京 100088)

**摘要** 本实验采用眼动技术和实验神经心理学的方法对珠心算的认知过程进行了实验研究。研究发现, 在竖式运算时, 接受过珠心算训练的儿童与没有接受过珠心算训练的儿童相比其眼动轨迹显著不同; 神经心理实验的结果表明, 训练组儿童在数学运算能力、数字记忆空间、注意力、大脑功能偏侧化等方面均与非训练组儿童有显著差别。

**关键词** 珠心算, 眼动模式, 脑功能偏侧化。

**分类号** B844.1

## 1 引言

“珠心算”是“珠算式心算”的简称, 这是对我国历史上一些人在珠算实践中能够“在脑中打算盘”方法的继承和发展。1980年浙江省慈溪市鸣鹤小学率先开始进行珠心算训练, 经过训练的学生计算能力有明显提高。1990年浙江省政府和教委开始推广珠心算训练。从1991年起, 中国珠算协会开始在全国推广珠心算训练的方法。据统计, 截止到2000年, 我国接受珠心算训练的儿童已近300万人。珠心算的训练过程分为三阶段, 第一个阶段是实际拨珠训练, 第二个阶段是模拟拨珠训练, 第三个阶段是在脑中打算盘。通过数月至数年的反复训练, 学生可以达到在脑中形成清晰的算珠表象, 并可以对这种算珠表象进行操作, 从而大大加快了计算的速度<sup>[1]</sup>。教学实践和已有的一些观察提示, 珠心算训练能够增强学生的计算能力, 提高注意力、观察力和记忆力, 而且还可以促进儿童右脑的开发<sup>[2]</sup>。对于珠心算, 人们进行了一些心理学实验研究, 这些研究主要是通过“专家—新手”对比的研究方法, 探索了珠心算训练对于学生的记忆广度、记忆的迁移以及加工方式的作用, 其主要目的是证实“珠算图”的存在<sup>[3]</sup>; 同时也有一些研究结合了左右脑的机能特点, 采用同时操作两种任务

的实验方法, 从干扰效应上检测了珠心算与左右脑的关系<sup>[4]</sup>。不过到目前为止, 人们对珠心算技能形成过程的心理规律, 特别是神经心理机制还没有深入全面的实证性研究, 一些研究还是经验式的和观察性质的, 比较缺乏严格的实验室数据。

本研究试图通过实验的方法, 对受过珠心算训练的学生与未受过训练的学生进行眼动和大脑功能偏侧化等方面的神经心理学研究, 主要探讨:

- (1) 珠心算的视觉扫描过程;
  - (2) 珠心算训练对学生的注意和记忆机能的作用;
  - (3) 珠心算训练对学生大脑偏侧化过程的影响。
- 通过对以上三个问题的研究来探讨珠心算的认知神经心理机制。

## 2 方法

### 2.1 被试

北京市某小学的3年级学生共22人, 平均年龄为10.3岁。实验组为接受过3年珠心算训练的儿童, 共10人, 控制组为没有接受过珠心算训练的儿童, 共12人。实验组儿童和控制组儿童在学习成绩、运动技能以及行为表现方面没有明显差异。所有儿童均为右利手, 且视力正常。

### 2.2 实验材料

收稿日期: 2004-8-12

作者简介: 尹文刚, 男, 中国科学院心理研究所研究员, 博士生导师。

### 2.2.1 数字计算任务（数字计算内容即为眼动阅读材料）

此项任务有两个目的，一个是对学生的计算能力进行测定，另一个是在计算过程中进行眼动测定，即在进行数字计算的同时探索眼动的注视时间及轨迹。数字计算的测试题目一共有3组，分为两位数加法运算、四位数加法运算、两位数与三位数乘法运算。每组10道题目，竖式排列和横式排列呈现各5道题目。根据学生学习珠心算的一般水平，所有题目答案数字的位数在三位数和五位数之间。

### 2.2.2 短时记忆空间和注意任务

**数字记忆广度任务** 主要通过让被试口头背数来进行实验，包括顺背和倒背两部分。顺背时，主试口头呈现由3~10个随机排列的数字组成的数字系列，要求被试按顺序复述；倒背时，用同样方式呈现由2~10个数字组成的数字系列，要求被试反向复述。此项实验测量被试的短时记忆容量，这是短时记忆的常用指标。该测验与韦氏智力量表中的数字记忆广度测验内容类似。

**注意划消任务** 此项任务通过在限定时间内对特定字母的划消来反映被试的注意品质，包括注意的选择性、注意的广度等。实验时将拼音字母“b”、“d”、“p”、“q”随机排列成一个字母表，要求被试在限定的一分钟内将所有的拼音字母“b”划去。考察被试在限定时间内漏划和错划的有多少。这项测验主要参照临床神经心理学中用于检查忽视症的内容，是一种临幊上比较实用的测验注意机能的方法。

**搜索任务** 此项实验通过让被试按指导语对呈现在眼前的数字矩阵和文字矩阵进行搜索，测定其眼球运动轨迹和视觉注视的特征。搜索任务使用的材料为5×5的数字或汉字矩阵，数字为0~9之间的个位数，汉字为表示颜色的汉字（红、橙、黄、绿、青、蓝、紫、黑、白、粉）。数字搜索和汉字搜索各五屏，每屏中的目标数字（目标数字为“3”）和目标汉字（目标汉字为“黄”）仅有一个。

### 2.2.3 YWG 神经心理测试

YWG神经心理测试是临幊上应用的一套用于神经心理测定的研究用软件，编制者为中科院心理所尹文刚研究员，这套测试包括多项神经心理机能的测定，各项分测验可单独使用，进行单项神经心理功能的检查，计算机自动计分，指标包括正误差率、反应时间等，其主要目的是进行临幊个案研究，目前信度和效度正在修订过程中。本实验主要

应用了其中的以下几个分测验：

**图象记忆水平测验（水平一和水平二）** 图象记忆水平测验针对的是被试对非文字图象的记忆能力。这是一种再认测试，让被试对刚刚看完的一组图案进行再认。测验分为两种水平，水平二比水平一的难度大一些。计分指标是正误差率。

**汉字记忆水平测验（水平一和水平二）** 汉字记忆水平测验针对的是被试对汉字的记忆能力。汉字记忆水平测验的操作程序与图象记忆是一致的。两者形成一种对照。前者测的是被试对图象信息的记忆，后者测的是被试对语词信息的记忆。计分指标是正误差率。

**大脑偏侧化趋势测验** 大脑偏侧化趋势测验的原理是速示器半视野技术。这种技术是研究正常人大脑两半球偏侧化的主要实验室手段。刺激分为语词信息和非语词信息两种。语词信息用的是一些汉字，非语词信息用的是一些简单的图象。汉字呈现在右视野，图形呈现在左视野。根据人们的研究，左视野（右半球）对图形辨识得好，反应快，错误率低；右视野（左半球）则对文字信息辨识得好，反应快，错误率低。测试是通过计算机按短于眼球转动时间的速示方式向左半视野和右半视野选择性地投射文字的和图形的刺激，从而客观地测定左脑占主导地位的处理文字的半边视野认知能力和右脑占主导地位的处理图形的半边视野认知能力，以错误率和反应时间作为指标，揭示被试左脑特化的程度和右脑特化的程度。这种特化程度反映了大脑的功能状态。

偏侧化测验操作程序：要求被试注意注视点，注视点呈现（150毫秒）后，刺激出现，左半视野为图象，右半视野为汉字。刺激呈现的时间为180毫秒。随后屏幕上出现垂直呈现的图象和汉字。这时要求被试辨别这个相继呈现的图象和汉字和刚刚看过的是否相同。如果是一样的，就按“相同键”，不一样时就按“不同键”。计分指标包括错误率和反应时。

### 2.3 实验程序与仪器

数字计算任务、数字和汉字搜索任务是在眼动仪上进行的，即儿童心算屏幕上呈现的算式，或搜索目标数字或汉字，并大声报告计算或搜索的结果。眼动仪记录儿童的眼动轨迹。眼动仪是SR Research Ltd. 开发的 EyeLink。该设备由两台Pentium微机组成，通过以太网连接。用其中一台

微机显示实验材料，另一台微机记录眼动。屏幕分辨率 $640\times480$ 象素，灰底黑字，字体为宋体，字号为 $48\times48$ 象素。被试与屏幕的距离约为60cm，眼睛正对显示器的中心，领下使用小托帮助固定头部。被试头戴一个轻便头盔，上面有一红外定位摄像机，帮助在被试头部发生轻微颤动时进行方向校正。被试眼睛的注视情况通过两个微型摄像机输入微机，数据采样率为每秒250次，相邻两次采样的间隔为4ms。为保证记录的准确性，在实验过程中进行多次休息和校准。所有材料的呈现和眼动记录均由专用软件自动完成。

### 3 结果与分析

#### 3.1 数字计算实验

结果表明，接受过珠心算训练的儿童与未接受过珠心算训练的儿童在正确率和注视时间（反映计算速度）上存在明显差异，训练组儿童的正确率和

注视时间都显著优于非训练组儿童。训练组儿童的心算正确率为0.82，而非训练组儿童的心算正确率仅为0.10，训练组儿童的正确率显著高于非训练组儿童的正确率， $t(20)=11.21, p<0.01$ 。这一差异表明了珠心算训练对于提高学生计算准确率的效果，这也正是为什么珠心算在国内外如此盛行的一个主要原因。训练组儿童平均每个竖式的总注视时间是7982毫秒，非训练组儿童的平均总注视时间是15875毫秒，训练组儿童的平均总注视时间显著短于非训练组儿童， $t(20)=-9.05, p<0.01$ 。同样，训练组儿童每个竖式的总注视点个数显著少于非训练组儿童， $t(20)=-3.45, p<0.05$ 。当横式排列计算时，训练组儿童心算的平均总注视时间仍显著低于非训练组儿童， $t(20)=-14.62, p<0.01$ ，训练组儿童的平均总注视点也显著少于非训练组儿童， $t(20)=-11.21, p<0.01$ 。

表1 训练组与非训练组儿童的心算的正确率与注视时间（单位：毫秒）

被试	正确率	平均总注视时间（竖式）	平均总注视时间（横式）	平均总注视点（竖式）	平均总注视点（横式）
训练组	0.82	7982 (2607)	6302 (1923)	29.68 ( 8.70)	22.22 (7.00)
非训练组	0.10	15875 (1410)	16733 (1421)	49.53 (16.32)	63.16 (9.61)
差 异	0.72**	-7893**	-10431**	-19.85*	-40.94**

注：\*  $p<0.05$ , \*\*  $p<0.01$ 。

表1 数据以五个四位数的加法运算结果为代表，括号内为标准差，下同。

眼动追踪发现，接受过珠心算训练的儿童与未接受过珠心算训练儿童的眼动轨迹是不同的。接受过珠心算训练儿童的典型眼动轨迹表现为“横扫描”（见图1），而没有接受过珠心算训练的儿童的典型眼动轨迹表现为“竖扫描”（见图2）。眼动轨迹揭示，训练组与非训练组儿童的心算过程是不同的。对加法算式，非训练组典型算法是将所有个位相加，保存个位上的结果，并进位，然后将十位上的数相加，保存十位上的结果，并进位，依次类推。而训练组典型算法是，将一个加数的四个位数上的数字读进，然后读进第二个加数的四个位数上的数字，迅速相加并保留各个位数上的结果，然后读进第三个加数的四个位数上的数字，迅速相加并保留结果，依次类推。

结合眼动轨迹、注视时间和正确率数据，我们可以看到，训练组儿童的数字计算正确率远远高于非训练组儿童，计算时的注视时间和注视点少于非

训练组儿童，这种优势不仅在竖式计算时存在，而且在横式计算中也存在。训练组儿童横式计算时的注视时间和注视点相对少于竖式计算，而非训练组儿童在横式计算中的注视时间和注视点多于竖式计算，即在横式运算中表现出更大的困难。一个可能的解释是训练组儿童利用脑中的“算盘”进行对位和相加，因此更少受到算式表现形式的影响。

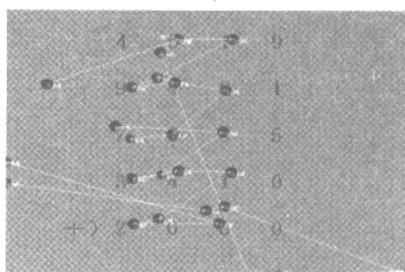


图1 接受过珠心算的儿童的眼动轨迹

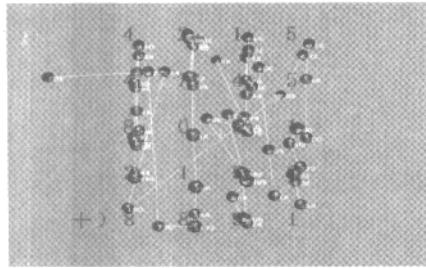


图2 没有接受过珠心算训练的儿童眼动轨迹

### 3.2 短时记忆空间和注意机能实验

数字记忆广度测验表明，训练组儿童的平均顺序记忆广度（7.90）大于非训练组儿童顺序记忆广度（7.08）， $t(20)=2.15, p<0.05$ ；训练组儿童的逆序记忆广度（6.80）也显著大于非训练组儿童（4.50）， $t(20)=5.06, p<0.01$ 。这种差异提示，珠心算训练对于学生的数字短时记忆容量有提高作用，这种作用的来源可以从珠心算的训练过程来看，因为在训练过程中需要进行大量和反复的听觉性及视觉性的数字记忆训练，这种训练自然会有一些效果，它会对学生的数字短时记忆容量有一定的促进作用。另外，这种提高作用对逆序的效果表现得更为明显。一个可能的原因是逆序需要人的主动提取的处理过程，难度更大，因而数字短时记忆容量的提高效果也就更为明显。注意划消测验结果表明，训练组的平均划消数（45.30）多于非训练组的

划消数（31.92）， $t(20)=2.33, p<0.05$ 。两项测验结果显示了训练组比非训练组儿童在记忆广度和注意的集中度和选择灵活性方面均有优势。

表2 训练组与非训练组儿童的数字记忆广度测验与注意划消测验的正确数（单位：个数）

被试	数字记忆广度（顺序）	数字记忆广度（逆序）	注意划消
训练组	7.90 (0.99)	6.80 (1.40)	45.30 (17.24)
非训练组	7.08 (0.79)	4.50 (0.67)	31.92 (9.15)
差 异	0.82*	2.30**	13.38*

用搜索任务中平均每屏的总注视时间和总注视点作为衡量搜索任务快慢的指标，实验结果揭示出训练组与非训练组在数字搜索任务中的总注视时间方面存在显著差异：训练组的总平均注视时间为2112毫秒，非训练组的总平均注视时间为3086毫秒，训练组的数字搜索速度显著快于非训练组， $t(18)=-2.74, p<0.05$ 。总注视点的结果与总注视时间的结果是一致的：训练组的总注视点平均为9.8个，非训练组的总注视点平均为13.69个，训练组的总注视点显著少于非训练组， $t(18)=-2.71, p<0.05$ 。然而在汉字搜索任务中，两组儿童并没有显著差异， $t(18)=-0.93, p>0.05$ ，这个结果提示，珠心算训练并没有将视觉扫描的优势泛化到汉字任务上面。

表3 训练组与非训练组儿童的数字搜索和汉字搜索的眼动数据（单位：毫秒，个数）

被试	数字搜索任务总注视时间	数字搜索任务总注视点	汉字搜索任务总注视时间	汉字搜索任务总注视点
训练组	2112 (247)	9.8 (2.24)	4135 (947)	18.96 (4.08)
非训练组	3086 (1039)	13.69 (3.79)	4475 (682)	21.16 (4.15)
差 异	-974**	-3.89*	-340	-2.20

### 3.3 YWG 神经心理实验

在两个图象记忆水平和两个汉字记忆水平的测验中，训练组儿童与非训练组儿童在反应时间和反应的错误率上均没有显著差异，这提示珠心算训练对于学生的汉字记忆和图形记忆还没有造成明显的正迁移作用，这个结果还提示珠心算训练产生的泛化作用有一定的局限，因为训练用的材料都是数字，对于数字有一定的迁移作用，而对于非数字化的信息，也许是因为训练的程度不够，或是其他的原因，从这个实验的结果上看，还没有形成明显的泛化的正迁移作用。这个结果进一步深化了用数

字记忆广度作为指标进行的短时记忆容量的研究（参表2的研究结果）。

大脑偏侧化趋势测验中，训练组在反应时间和错误率方面均与非训练组有显著差异：训练组的平均反应时间（422毫秒）短于非训练组的反应时间（758毫秒）， $t(19)=-2.20, p<0.05$ ；且训练组的错误率（0.13）少于非训练组的错误率（0.34）， $t(19)=-2.47, p<0.05$ 。这个实验的结果表明，珠心算训练组学生的大脑偏侧化趋向测验成绩明显好于非训练组。

这个具有明显差异的结果提示了珠心算对于大

脑的偏侧化进程可能有一定的影响，因为这个实验的成绩是与脑的偏侧化程度呈反比的，也就是说，左脑和右脑的分工越强，或是偏侧化程度越完全，错误率越低，反应时间越短（见表4）。

**表4 训练组与非训练组儿童的大脑偏侧化趋势测验的反应时和错误率（单位：毫秒）**

被试	平均反应时（标准差）	平均错误率（标准差）
训练组	422 ( 65)	0.13 (0.07)
非训练组	758 (453)	0.34 (0.26)
差异	-336*	-0.21*

## 4 讨论

### 4.1 珠心算的视觉扫描过程及其意义

两组儿童珠心算时不同的眼动轨迹表明，珠心算训练形成了特定的视觉扫描过程，这种扫描过程是视觉—心理活动的指征，表明训练组儿童在计算中可能利用了表象。其意义在于经过训练的儿童在看完第一个加数后，迅速将其表征在脑中，然后扫描下一个加数，迅速将该加数的每一位数加到前一个加数的每一位数上，并保留每一位上的计算结果。再进行下一个加数的计算。这样的算法使训练组儿童对数字信息的加工和存储并未超出短时记忆的局限，使正确计算成为可能。对非训练组来说，对五个四位数的加法中有太多的中间结果需要保存，加工和存储远远超出短时工作记忆的局限，不但计算速度慢，正确的计算几乎是不可能的。

### 4.2 珠心算训练对儿童一般认知能力的影响

训练组儿童不但在计算方面有一定优势，而且在注意力和数字记忆、数字搜寻能力等一般认知能力上也有明显的优势（有关研究观察发现，一般学生注意力集中的时间为15~20分钟，而经过珠心算训练的儿童的注意力集中时间为30~40分钟<sup>[5]</sup>。这与本实验的研究结果是一致的，训练组儿童在注意品质上比非训练组儿童有了显著的提高）。有研究表明，珠心算能手对数字的记忆广度可以达到普通入数字记忆广度( $7\pm2$ )的2倍以上。本实验得到了一致的结果，即接受过珠心算训练的儿童的数字空间记忆广度明显大于非训练组儿童。

珠心算能手通过训练所获得的能力是否能够迁移到其它认知任务上，这个问题在实验研究上没有得到统一的结果。有研究认为珠心算能手超常的记

忆力是针对具体领域的、具有特异性。Kawakam进行的由记忆数字向记忆图形迁移的实验发现，虽然珠心算熟练组比初学组的数字记忆力强，但两组被试对几何图形的记忆并没有明显的差别<sup>[6]</sup>。但是也有研究发现了珠心算能力高与珠心算能力低的学生脑电波的差异，并认为珠心算促进右脑的活动，发展了创造力<sup>[7]</sup>。本实验的研究只发现了训练组儿童在数字记忆能力上的提高，并没有发现这种记忆能力迁移到文字或图象记忆能力上。而且在视觉搜索任务中，本实验发现训练组儿童在数字搜索任务上与非训练组儿童在注视时间和注视点上有显著的差异，而在汉字搜索任务上却并没有发现这种差异。所以本研究没有发现儿童对数字的记忆和识别能力迁移到对文字的记忆和识别能力上。但是，本实验设计较为简单，所以珠心算能力是否能迁移的问题和珠心算对儿童的认知发展是否有长期影响的问题，还需要进一步的探讨。

### 4.3 珠心算训练对大脑功能偏侧化的影响

儿童大脑功能的发展是目前人们比较关心的问题，特别是大脑功能偏侧化的发展及其与儿童学业的关系更是受到人们的重视<sup>[8]</sup>。大脑功能偏侧化主要是指大脑两半球能有效加工的信息种类是不同的，这种偏侧化的过程是随着儿童的成长而不断成熟的。在本实验中，发现训练组儿童与非训练组儿童之间有明显的差别，表4中的结果显示了这种明显的差异，不仅是错误率方面，而且在反应时间上同样存在。这种差异提示训练对学生大脑功能偏侧化进程的影响，即训练促进了学生大脑功能的偏侧化的进程，训练组儿童比非训练组儿童表现出了更为明显的左半球语言加工优势和右半球图形加工优势。Hatta等人采用让被试同时操作两种任务的实验手段检查珠心算能手与普通人的脑半球工作情况，结果发现能手的右脑比左脑更有利于心算<sup>[9]</sup>。这在一定程度上与我们的实验结果是吻合的，即珠心算提高了右脑处理图象的作业能力。但是，本实验发现的珠心算对大脑功能偏侧化的影响只是局限在以半边视野速示为基本条件的实验环境中，对于汉字和图形的记忆机能尚没有发生明显的正迁移作用。一个可能的解释是珠心算虽然促进了左脑和右脑的偏侧化进程，但是左右脑的这种分化程度还不足以让学生在对汉字或图形的记忆活动中表现得更加出色，或许，迁移还需要一定的时间历程，就象有人发现的音乐训练可以提高人的语词方面的记忆

能力一样，其效果也是需要一定的时间才能反映出来的<sup>⑨</sup>。另外，本实验也不能非常明确的回答珠心算对儿童的右脑发展是否有特殊的帮助，这些还有待于更多的实验研究工作，如对训练组儿童与非训练组儿童进行脑功能成像的研究等等，来进一步探索珠心算训练能否产生迁移作用及其机理。我们这个研究还仅仅是一个初步的从视觉扫描和神经心理实验的角度来探讨珠心算与脑功能的关系的尝试。

## 5 小结

通过本实验研究的结果可以得到以下结论：

(1) 珠心算训练组儿童与非训练组儿童在进行心算时眼动模式是不同的，训练组儿童的眼动模式为“横扫描”，而非训练组儿童的眼动模式为“竖扫描”。训练组儿童比非训练组儿童在运算能力上有显著的提高。

(2) 训练组儿童在数字搜索任务上显著优于非训练组儿童，但是在汉字搜索任务上则没有差异，这说明数字搜索在汉字搜索任务上没有迁移。训练组儿童在数字记忆广度和注意测验上的优势，说明珠心算训练可能有助于数字记忆能力和注意力的提高。

(3) 通过珠心算训练，训练组儿童比非训练组儿童表现出更强的大脑功能偏侧化趋势。

## 参考文献

- 1 黄伟. 多媒体课件在珠心算教学与练习中的作用. 江苏省常熟市报本中心小学“开展珠心算实验，开发学生学习潜能”研究项目论文, 1999, 12
- 2 黄伟. 珠心算多媒体课件探索与开发. 江苏省常熟市报本中心小学“开展珠心算实验，开发学生学习潜能”研究项目论文, 1999, 6
- 3 高民, 沈泓. 珠心算的心理机制实验研究述评. 心理科学, 1999, 22 (5) : 419~422
- 4 Hatta T, Miyazaki M. Visual imagery processing in Japanese abacus experts. *Imagination, Cognition & Personality*, 1989, 9 (2) : 91~102
- 5 顾培华. 开展珠心算实验提高学生的数学能力和其他能力. 中珠协98算理算法研讨会会议论文, 1998, 10
- 6 Kawakami L. Digit and shape memory function in soroban learners: Are soroban learners superior in general Perceptual and Motor Skill, 1995, 81: 75~80
- 7 Katayama O. The venerable beads. *Look Japan*. 1993, 39 (449) : 20~21
- 8 陈英和. 认知发展心理学. 杭州: 浙江人民出版社, 1996. 363~367
- 9 Agnes S. Chan, Yim-Chi Ho, Mei-Chun Cheung. Music training improves verbal memory. *Nature*, 1998, 396 (11/12) : 283

## MENTAL ABACUS: A COGNITIVE AND EYE MOVEMENT STUDY

Yin Wengang<sup>1</sup>, Shu Hua<sup>2</sup>, Jiang Zhifeng<sup>3</sup>, Wu Di<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> Key Laboratory of Mental Health, Institute of Psychology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101; <sup>2</sup> Department of Psychology, Beijing Normal University, Beijing 100871; <sup>3</sup> China National Institute for Educational Research, Beijing 100088)

### Abstract

Using eye scanning technique and neuropsychological methods, we conducted an experiment on mental abacus. The results showed there was a significant difference of the eye movement patterns between trained students and no-trained when they were doing vertical calculation. Further neuropsychological analysis suggested there were also significant differences between trained students and no-trained in the areas of mathematical abilities, digital span, attention, and hemisphere asymmetric functions.

**Key Words** mental abacus, eye movement pattern, hemisphere asymmetric functions.