

自学辅导教学与常规教学在解应用题中 分析能力的比较研究*

中国科学院心理研究所 卢仲衡 王兴华 须 功
刘新生 赵 虹

一、问题提出

思维是构成人的心理和智能的最主要部分。分析能力乃是思维能力的核心之一。学生在列式解应用题时,分析能力最容易表现出来,但要研究这种列式解题的分析能力,必需联系思维过程来进行心理分析。要了解解决问题的思维过程必需采用出声思维(边想边说)和事后口头报告(回忆思维过程)的方法。

列方程解应用题有三种方法:第一种方法是先识别应用题的类型,即先找题型;第二种方法是先确定未知数,根据该题条件把未知数(x)与已知数的关系联系起来列方程;第三种方法是先分析等量关系,通过未知数表示哪些数将使横式两边相等来列方程。我们编写的《中学数学自学辅导教材》着重于第三种方法。

现在我们对自学辅导教学和常规教学在列式解应用题方面作一些比较,从中找出较优的方法,同时也试图解决人们怀疑采用自学辅导教学法能否学好解应用题的问题。

二、实验对象、材料和方法

(一) 对象

对四个学校的自学辅导教学班和常规教学班在学完一元一次方程应用题后进行了一次应用题知识的普查。其目的主要不是比较它们的教学效果,而是从中找出两种班对等的优中差各3名学生来进行个别试验(这些优中差学

生还要参照平常成绩并与老师商讨决定)。在四个学校中实验班和对比班各选取优中差生共36名。

(二) 个别实验材料

选取三道一元一次方程应用题为个别测验材料。第一题的题型不明显;第二题的等量关系不明显;第三题要求设直接和间接未知数,是有多种解法的题。

第一题的原题:有一块土地,重型拖拉机耕6小时所耕的数量与轻型拖拉机10小时所耕的数量相等,现在轻型拖拉机耕了4小时后重型拖拉机才开始耕,问再过几小时重型与轻型拖拉机所耕的数量相等。

这题很容易被错认为是单一的工程问题。

铺垫题一:有一块土地,重型拖拉机一小时能耕 $\frac{1}{6}$,轻型拖拉机一小时能耕 $\frac{1}{10}$,现在轻型拖拉机耕4小时后,重型拖拉机才开始耕,问再过几小时重型、轻型拖拉机耕地的数量相等?

铺垫题二:有一块土地,重型拖拉机一小时能耕 $\frac{1}{6}$,轻型拖拉机一小时能耕 $\frac{1}{10}$,现在轻型拖拉机耕4小时后,重型拖拉机才开始耕,经过 x 小时,重型拖拉机与轻型拖拉机耕地数量相等,则轻型拖拉机一共用了 $(x+4)$ 小时,请你找出等量关系,列方程。

第二题的原题:两水缸原来盛有不同量的水,如从第一缸提出一桶水,倒入第二缸,则两

* 本研究得到人民大学附中、北京十一学校、北京钢铁学院附中、北京一二三中的领导和老师的大力支持,在此表示感谢。

水缸所盛的水量相等。如从第二缸提出 20 桶水，倒入第一缸，则第一缸所盛的水量为第二缸的 3 倍。问第一缸原来有多少桶水？

铺垫题一：有两缸水，第一缸有 x 桶水，第二缸有 $(x-2)$ 桶水，如从第二缸提出 20 桶水倒入第一缸，则第一缸所盛的水量为第二缸的 3 倍，问第一缸原来盛多少桶水？

铺垫题二：有两缸水，第一缸有 x 桶水，第二缸有 $(x-2)$ 桶水，如从第二缸提出 20 桶水倒入第一缸，则第一缸变成了多少桶水？第二缸剩多少桶水？如果现在第一缸所盛的水量为第二缸的 3 倍，问第一缸原来盛多少桶水？

第三题的原题：两辆小汽车从颐和园开往北京飞机场。第一辆小汽车的速度是每小时 40 里，开出半小时以后，第二辆小汽车也从颐和园开出，它的速度是每小时 50 里，结果两车同时到达飞机场。求颐和园和飞机场之间的距离。

铺垫题一：两辆小汽车从颐和园开往北京飞机场，第一辆小汽车的速度是每小时 40 里，开出半小时后，第二辆小汽车也从颐和园开出，它的速度是每小时 50 里，结果两车同时到达飞机场，问第一辆汽车比第二辆多用多少小时？颐和园到飞机场之间的距离是多少？

铺垫题二：若设颐和园到飞机场之间的距离为 x 里，那么第一辆小汽车以每小时 40 里的速度先开出半小时后，第二辆小汽车以每小时 50 里的速度开出，结果两车同时到达，第一辆行驶的时间为 $\frac{x}{40}$ ，第二辆行驶的时间为 $\frac{x}{50}$ ，问颐和园到飞机场的距离是多少？

(三) 测验方法：

测验是个别进行的。被试者拿到题后，就高声朗读题目，要求在解题时出声思维，边想边

说地把思维过程外显，主试者详细记录下被试边想边说的材料。每题列式 6 分钟，列不对就给铺垫题一，如果在 2 分钟内列对铺垫题一，即再列原题式子，如果铺垫题一仍列不对，即出示铺垫题二，2 分钟内列对铺垫题二，再列原题，铺垫题二仍不会列就开始转入第二题。第二三题的做法都和第一题一样。三道题目做完后，即问他们是否首先想类型，抑或先设未知数，还是先找等量关系，并且提问一些在自我口述中有怀疑的问题，以此作为口述材料的补充。用铺垫题来作启发要比主试者中途提示科学一些。每校实验班(9人)和对比班(9人)都是当天做完，这样就避免了被试者预先知道题目的可能。

三、研究结果

为了找出实验班和对比班各 3 名优中差学生，我们对四个学校的实验班和对比班进行了一次应用题普查的测验，测验成绩见表一。

表 1 实验班与对比班应用题普查考试成绩比较表

校 别	人大附中	钢院附中	一二三中	十一学校
平均差数	+3.2	+6.2	+8.7	+8.1
差异检验	$P > 0.05$	$P < 0.05$	$P < 0.01$	$P < 0.01$

从表一可以看到，四个学校的平均差数都是实验班大于对比班，除人大附中外，其他三个学校的平均差异都达到显著和非常显著水平。这次测验不仅找出了实验班和对比班对等的各 3 名优中差学生来进行个别实验，而且也证明了用自学辅导教学法学习应用题是可行的。

表 2 是四个学校的实验班和对比班优中差学生各 36 人逐个地边想边说的做题结果。

表 2 在个别测验中四个学校实验班学生和对比班学生做题结果比较表

题 号	第 一 题				第 二 题				第 三 题				
	做题结果	原题做对	铺垫一做对	铺垫二做对	全不会做	原题做对	铺垫一做对	铺垫二做对	全不会做	原题做对	铺垫一做对	铺垫二做对	全不会做
实验班 (36人)		20	7	1	8	15	12	5	4	29	1	/	6
对比班 (36人)		11	14	3	8	7	21	1	7	30	/	1	5

注：1. 实验班和对比班的优中差学生各 3 人，四个学校实验班和对比班各选取 36 人。

2. 第三题实验班用三种证法的有 25 人，而对比班只有 20 人。

第一题的题型,似单纯工程问题,而实际是工程和追及混合型的题。这道题比较难,容易产生错误,要求有较高的分析能力。边想边说个别实验的结果,实验班对原题能正确列方程的比对比班好得多;实验班全错或全不会做的与对比班一样多。

学生甲是这样分析的:先设再过 x 小时重型拖拉机与轻型拖拉机所耕地的数量相等。从原题的前一句话分别求出重型与轻型拖拉机的工作效率,重型拖拉机每小时耕 $\frac{1}{6}$,轻型拖拉机每小时耕 $\frac{1}{10}$ 。从原题的后一句话知道轻型拖拉机一共耕了 $(4+x)$ 小时,耕的地是 $\frac{1}{10}(4+x)$;重型拖拉机耕了 x 小时,耕的地是 $\frac{1}{6}x$ 。这样就可以找出等量关系,轻型拖拉机 $(4+x)$ 小时的工作量等于重型拖拉机 x 小时的工作量,得方程 $\frac{1}{10}(4+x) = \frac{1}{6}x$ 。

学生乙是这样分析的:我把它看成是追及问题,等量关系是追的所干的工作量减去被追的所干的工作量,等于所要追的工作量。设再过 x 小时重型拖拉机与轻型拖拉机所耕的数量相等。这就好比 x 小时追上一样,可以找到等量关系:重型拖拉机 x 小时所耕的地减去轻型拖拉机 x 小时所耕的地,等于轻型拖拉机先耕4小时的地,马上得到方程 $\frac{1}{6}x - \frac{1}{10}x = \frac{4}{10}$ 。

第二题是等量关系不明显的题。这也是一道较难的题。难点在于从第一缸提出一桶水倒入第二缸,则两缸水量相等,为什么不是 $(x-1)$ 而是 $(x-2)$,这要很好地分析才能理解,否则就会产生 $(x-1)$ 的错误。这一题实验班做对原题的有15人(其中能一次做对的11人,做错后自己立刻改正的4人),而对比班做对的只有7人(一次做对的仅3人,错后自己改正的4人)。实验班全错或全不会做的比对比班少些。

学生丙读完原题后,即能边想边说地把她的思路非常清楚地表达出来,就好象方程已在纸上,看着谈出来似的那样流畅,使两位主试者感到很惊讶。这个学生看题后,便可能在头脑中迅速地建立了方程,因而边想边说并不影响她的思维过程。

学生丁边想边说的思维过程是这样的:设第一缸原来有 x 桶水, $x+20$ 是多少(停顿)?第二缸水是多少(自言自语)?噢,知道了,设第一缸原来有 x 桶水,那么第二缸为 $(x-2)$ 桶水。边说边写出 $x+20=3(x-2)$,解之,得 $x=13$ 。停顿一会又自言自语地说,水太少了,不应该这么少的水,13桶水提不出20桶水。噢,知道了, $x+20=3(x-2-20)$,刚才一缸加了20桶,而另一缸没有减去20桶, $x=43$ 。

第三题是一道比较容易的题,出这题的意图是看看学生能否用多种证法列式解题,即一种可设直接未知数,一种设间接未知数来列式解题。实验班和对比班做对和做错这道题的人数几乎相等,没有什么差异。但用两种方法(直接设未知数和间接设未知数)以上的,实验班有25人,而对比班只有20人,会设间接未知数的实验班学生比对比班多些。

表3 在个别测验中四个学校实验班学生和对比班学生做题平均时间比较表

题号	第1题		第2题		第3题	
	实验班 (36人)	对比班 (36人)	实验班 (36人)	对比班 (36人)	实验班 (36人)	对比班 (36人)
做题平均 时间	17.96'	19.66'	17.9'	22.0'	22.53'	27.48'

四个学校的自学辅导教学班(实验班)和常规教学班(对比班),每校每班选取优中差学生各3名共9人进行个别测验,记录下解题列式时间。对实验班和对比班36人都分别进行了测验。从表3可见实验班学生列式解题速度比对比班要快些。

从这三道不同类型题的列式解题时间和效果看来,采用自学辅导教学法优于常规教学法。这就说明了怀疑自学辅导教学法不能学好应用题是没有根据的。事实上自学辅导教学法有利于培养较强的独立分析能力。

能力并不是天生的,能力是通过教学、实践和生活发展起来的。它表现为一个人能迅速而容易地解决问题,并掌握其技能和技巧的心理品质。分析能力是思维能力的核心,是学生一切认识活动的基础。过去在教学中,学生数学分析能力的发展是采取传统的、由老师在课堂上作详细分析的方法而得来的,从现在的资料

来看,在老师指导下以学生自学为主的自学辅导法更为有效。

表4 在个别测验中实验班学生和对比班学生列方程首先想到什么的对照表

列方程种类	先找题型的人数	先设未知数的人数	先找等量关系的人数
实验班 (36人)	1	15	20
对比班 (36人)	5	8	23

从表4可以看到,学生拿到应用题时首先想到题型的,实验班对比比班人少(1:5);先设未知数的,实验班对比比班人多(15:8);先找等量关系的,实验班与对比班差不多(20:23)。测验得到的这些数据,还需要进行详细讨论。

四、讨论

(一) 关于列式解应用题是否能采用自学辅导教学问题。

分析能力最容易在解决困难问题或分析复杂情况的过程中表现出来,而应用题是数学中的难点之一,要求分析能力较高,因此,有个别实验班老师不按照“启读练知结”的课堂教学模式而采取讲授法来教应用题。而这次测试我们所选取的四个学校的实验班老师都是按照“启读练知结”的课堂模式进行教学的。启和结由老师向全班进行,中间的读练知是个别化的,由学生自学,老师积极巡视课堂,一般不中断学生的思路。这四个学校的学生做应用题的普查结果(见表1),自学辅导实验班成绩都优于常规教学班,有三个学校的实验班和对比班的差异达到显著或非常显著的水平。在边想边说的个别测验中,从四个学校的实验班和对比班各选取了36人进行试验,解题列式列对的,除第三题两种班的人数差不多相等外,第一、二两题都是实验班对比比班人数多一倍(见表2)。第一、二题列式比较困难,要求分析能力较高,结果实验班学生做对的人数较多,这可能是由于自学而形成的独立分析能力比较强的关系。(从表3可以看到做题的平均时间都是实验班学生对比比班学生少)

从测验的结果来看,应用题的教学不仅采

用自学辅导教学法是可行的,而且效果优于常规教学,题目愈困难,优越性愈显著。

(二) 列式解应用题是先设未知数还是先找等量关系,哪种方法较好?

列方程式解应用题有三种方法:一种是先识别题型;一种是先设未知数;一种是先找等量关系。在这里我们首先讨论先设未知数与先找等量关系哪种方法较好的问题。先设未知数是这样的:(1)分析出哪一个是主要的未知数;(2)用 x 或别的字母表示未知数;(3)根据问题条件通过 x 把其余的未知数表示出来;(4)根据已知数和未知数找等量关系列方程。先找等量关系是这样的:(1)首先弄清楚题意,找出表示同一数量的两个不同形式的代数式;(2)找出未知数用 x 或别的字母表示之;(3)通过未知数表示出哪些数量将相等;(4)把表示相等数量的两个不同的代数式用等号连结起来,即得方程。

心理学家认为先找等量关系智力活动的形式优于先设未知数。因为先设未知数很可能是问什么设什么,不去认真分析问题情境。我们也有这种看法,因此,在《中学数学自学辅导教材》中特别强调在列式解题中找等量关系。在开始学一元一次方程时就这样写道:“……列方程实际就是根据题意找出表示同一数量的两个不同形式的一次整式(其中一个整式可不含未知数),再用等号把它们连结起来,就得出方程了”。“根据以上的分析,可知利用方程解应用题的关键有两个:一是列代数式,二是找等量关系。在应用题中既没有代数式,而等量关系也往往不直接告诉我们,这就需要我们根据语言叙述,找出等量关系”。

自学辅导教材如此重视找等量关系,但是在这次个别测验的36个学生中就有15个先设未知数,而对比班只有8个,少了一半;先找等量关系的,对比班(23人)反而比实验班(20人)多3个。这是为什么?就我们所知,我们的数学教师绝大多数都认为先找等量关系比先设未知数好一些,对应用题的分析,特别着重找等量关系,再从等量关系中找未知数。实验班与对比班同样强调先找等量关系。自学辅导教材的分析中虽然注重找等量关系,但在解题过程中仍是首先“设某数为 x ”,因此,对于某些实验班的

学生来说仍会按照顺序先设未知数后列方程。

先找等量关系要分析问题情境，找出相等的两个代数式来，然后用等号把它们连接起来。这两个代数式至少有一个代数式含有未知数才能使两式相等，这就离不开找未知数。先设未知数也离不开找等量关系，只有在等量关系中才能确定哪一个为主要的未知数。其实在列式的过程中找等量关系和设未知数是交互进行、紧密联系的，最不好的就是不动脑子、不根据问题情境而是机械地问什么就设什么。如果通过认真分析问题条件，寻找已知数和未知数之间的关系，什么数值可能是相等的，通过未知数表示出哪些数将相等，那么，先找等量关系或先设未知数就不是两个对立问题了。

(三) 列式解应用题，先识别类型还是先分析等量关系，哪种方法较好？

主张先识别题型的认为，先通过模式辨认，在记忆贮存中提取与这模式相适应的方法，再经过信息加工就能迅速解决问题。很早以前，利用“龟鹤同笼”、“童子分桃”等抽象题型来教应用题，结果形成生吞硬套、思维刻板的现象。后来不再套这种题型了，但是仍然有人把应用题归为许多类，教学生识别。通过识别题型容易形成思维定势。在列式解应用题中，定势的积极作用是使解题过程压缩，简便而迅速，反映出心理活动的稳定性；其消极方面在于妨碍思维灵活性的培养，难于应付许多新问题、新情境，会使心理活动表现出惰性、呆板。由于我们的教材中很少分析题型，所以实验班在这次个别测验中大都不使用这种方法，36人中只有1人，而对比班就有5人使用。当然对题型也有一掠而过的，出声思维未必能反映出来。如第三题是典型的行程问题，也许想过题型，在出声思维中未反映出来或后来提问时可能已遗忘了。

分析等量关系的方法优点较多，它有利于培养思维的灵活性，能够使学生应付新问题、新情境，提高分析能力。不过，分析等量关系若有一定图式、题型作指引，就容易从记忆中提取与此类似的信息，在题型比较明显的条件下，先找题型会使列式更为敏捷而简便。因此，也不应把二者谁先谁后这一问题绝对化。

五、结论

1. 这次对一元一次方程应用题的普查和个别测验所获得的结果都是自学辅导教学班优于传统教学班。这就证明了采用自学辅导法教应用题是可行的，并有利于促进分析能力的发展。

2. 先找等量关系的人数大大地多于先设未知数的人数，其方法也是前者优于后者。在有些情境下两者是交互进行，不应把两者的谁先谁后对立起来。

3. 先找等量关系的也大大多于先找题型的人数，其方法也是前者优于后者。在题型较明显的条件下，先找题型使列式解题较为敏捷而简便，因此不应把它们绝对化。

4. 找等量关系可以应付任何新情境、分析新问题，减少盲目地乱设未知数、乱套题型的现象，从中培养了学生分析问题的能力。因此，在列式解应用题中，先找等量关系、重视找等量关系是对头的。

[附] 一元一次方程应用题的普查题：

1. 某中队少先队员收集到65公斤废金属，其中铜、铝之和比锌多1公斤，而铜比铝多15公斤，问他们收集到的铜、铝、锌各多少公斤？

2. 一架飞机在上午7时30分以每小时250千米的速度从甲市飞往乙市，这架飞机在乙市逗留30分钟以后，以每小时200千米的速度飞回甲市，在下午2时45分回到甲市，求甲市到乙市的距离。

3. 一个两位数的两个数字的和是11，如果在这个数上加上63，那么所得的两位数仍旧是原来的两个数字组成，不过位置对调了一下，求原来的两位数。

4. 一水池用甲管注水，可以在3小时内使空池注满，用乙管放水，可以在2小时内使满池放空，用丙管放水，可以在4小时内使满池放空，现在先在空池时开甲管1小时，然后三管齐开，问什么时候水池放空？

5. 有甲、乙两数，甲数的3倍与乙数的2倍的和是47，甲数的5倍比乙数的6倍小1，求这两个数(用两种或两种以上方法解)。