

关于儿童部分与整体关系 认知发展的实验研究^{1)*}

——6—7岁儿童用非除法运算解答包含
除的实验

何 纪 全

中国科学院心理研究所

摘 要

部分与整体的关系是事物的普遍关系的一种反映。儿童对表现在小学数学中的部分与整体关系的认知发展,是一个值得研究的课题。本研究对6—7岁儿童理解包含除的数量关系的认知特点,进行了调查。结果表明,6—7岁儿童用非除法运算解答二十以内的不同方式提问的包含除的问题,已达到一定的水平。对包含除的数量关系在理解上的差异,依赖于对数的部分与整体关系,即对总数、每份数和份数及其相互关系的掌握。

一、目 的

部分与整体的关系在数概念中表现为数量关系。包含除的数量关系是求一个数包含几个另一个数。就数的部分与整体关系看,包含除的被除数作为整体数,除数作为部分数。为了表述上的方便,把整体数称为“总数”,相同部分数称为“每份数”,相同部分数的份数称为“份数”。整体数包含部分数,在包含除范围内,是总数包含多少份每份数。对包含除的数量关系的理解,则是对总数包含多少份每份数这一关系的掌握。

发展心理学认为,儿童智慧发展的每个阶段,在客观世界的不同事物及其呈现形式的影响下,有他自己观察世界和解释世界的认知方式。本实验对未学过乘除的6—7岁儿童进行调查,看他们能否解答和如何解答包含除的问题。探讨儿童对数的部分与整体关系的认知的发展,及其对包含除概念形成的影响。

1) 本文于1981年4月18日收到

* 本研究是在刘静和、王宪钿同志指导下进行的。

本研究得到三机部四院幼儿园、公安局幼儿园、新兴小学、文兴街小学的领导和老师们的大力协助。特此表示感谢。

二、方 法

被试：幼儿园大班儿童和小学一年级第一学期学生各93名，平均年龄分别为6岁3个月和7岁4个月。每个被试符合会二十以内的加减但不会乘除的两个条件。

材料：测验题目*共为12个包含除的问题。系由三个实验因素按照 $L_{12}(3^1 2^2)$ 正交表编拟的。题目详见附录。三个实验因素是：1)题目的不同类别，即由提出问题的不同方式把12个题目分为图示题、文字题和应用题；2)每份数的多少，即把12个题中的6个题，每份数为1，另6个题的每份数为4；3)所求份数的多少，即把12个题中的6个题，份数为2，另6个题的份数为5。每份数的多少和所求份数的多少是实验考察的主要因素。

方式：对6岁儿童的测验，个别进行。对7岁儿童采用集体测验和个别询问相结合的方式。为了避免测验时题目的先后测验而产生的系统误差，全部测验题对每个被试都是随机的。

在主要实验进行后，为了进一步考察实验的主要因素，进行了补充实验。选择6为总数，其每份数为1、2、3，份数为6、3、2，以及18为总数，其每份数为1、2、3、6、9，份数为18、9、6、3、2，按照图示题、文字题和应用题，编出24道包含除的题目。对36名6—7岁儿童进行个别测验。

三、结果与分析

一、6—7岁儿童用非除法运算解答包含除的一般结果

(一) 6—7岁儿童用非除法运算解答包含除的成绩

在本实验条件下，儿童解答包含除的问题的成绩，总平均为74.05分。实验中没有发现根本不会解答的被试。成绩在60分以上的人数有133人，占全体人数的百分之七十二。得100分的人数有39人，占全体人数的百分之二十一。这说明6—7岁儿童对包含除的问题已具有一定的解答能力，对包含除的数量关系的理解已达到一定的水平。

7岁儿童的平均成绩为76.70分，6岁儿童的平均成绩为71.42分。相差5.28分。虽然统计检验认为无显著差别。但7岁儿童的高分组人数比6岁儿童要多些。较难题目的正确人数，7岁儿童比6岁儿童要多些。说明6岁儿童对包含除数量关系的理解程度，在数量偏大时受到一定的影响。

(二) 认知条件对儿童解答成绩的影响

从表1中看到，从理论上比较， F 值的大小说明三个实验因素的单独作用。结果认为，影响儿童成绩的因素，最主要的是每份数的多少，其次是所求份数的多少，再其次是题目的不同类别的影响。但是，从实际上看，每个题目同时包含着三个实验因素及其条件。因此，需要注意复合因素的作用，即组合的认知条件。为了寻找影响儿童解答成绩的复合

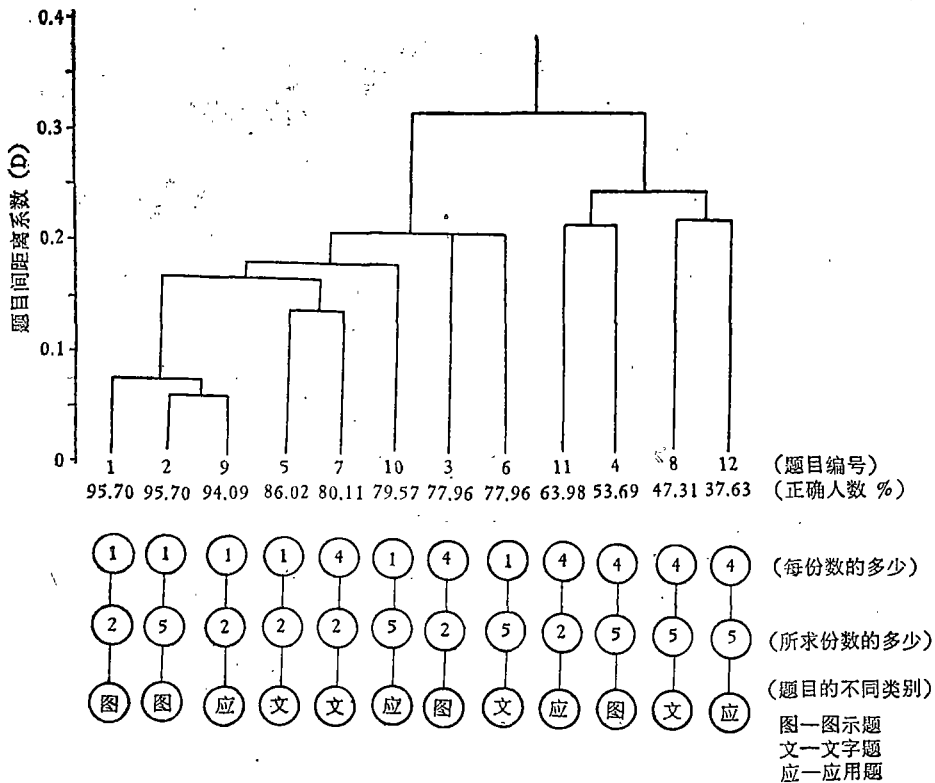
* 测验题目是经过与幼儿园老师讨论及预试后采用的。实验后，对每个测验题目的有效性进行评价。按照澳大利亚心理学家J. A. Keats(齐茨)的评价方法(依据齐茨1980年来华讲学)除第1和第2题外，其余10个题的 X^2 值，显著性均为 $P < 0.01$ 。测验题基本上是有意义的。

表 1 儿童的解答成绩(平均每题正确人数)在不同认知条件下的比较

成绩 被 试	认知 条件	题目类别			每份数		份数	
		图 示 题	文 字 题	应 用 题	1	4	2	5
7 岁 组 (93人)		75.50	70.25	68.25	81.83	60.83	74.33	68.33
		$R=7.25$			$R=21.00$		$R=6.00$	
6 岁 组 (93人)		74.25	62.25	59.75	82.17	50.67	80.00	52.83
		$R=14.50$			$R=31.50$		$R=21.17$	
平 均		74.88	67.75	64.00	82.00	55.75	77.17	60.58
		$R=10.88$			$R=26.25$		$R=16.59$	

说明：(1) 平均每题正确人数的计算是，在每个实验因素条件下，正确人数的和除以该条件包括的题目数。如75.50为题目类别的图示题(第1、2、3、4题)的正确人数的和 $302 \div 4=75.50$ (人)，余类推。
 (2) R 为极差，如7.25为最大值75.50减去最小值68.25的差。

因素，在12个测验题目的难易次序的基础上作出数量分类图。见图1。



从图1中看到，12个难度不同的测验题，因距离系数不同而产生类聚，大致可归纳为四类。显示了6—7岁儿童用非除法运算解答包含除题目时，从易到难发展的四个段落，依从于四种前后连贯的组合的认知条件。即，第一，对每份数为1、份数最多为5的图示题，

易于解答。当应用题的情境与儿童的熟悉经验相连时,那末每份数为1、份数最多为2的应用题,也容易解答。第二,能够解答每份数为1,份数最多为5的文字题和应用题,对每份数为4、份数最多为2的图示题和文字题也能解答。第三,对每份数为4、份数最多为5的图示题和每份数为4、份数最多为2的应用题,能够解答。第四,对每份数为4,份数最多为5的文字题和应用题,在比较晚些时候才能解答。

二、在用非除法运算解答包含除的活动中,儿童理解数量关系的指标

(一) 发展阶段与阶段指标

儿童对题目的分析综合活动反映出对题目的数量关系的理解程度。我们对被试的错误解答的性质加以归纳分析,划分为如下几个阶段,并确立指标。

发展基础与先决条件。被试不能解答的第一种情况是,大多数不回答,有的被试用题目中的某个数字来回答。这些被试都不会用自己的话来解释题目,不明白题目“问的是什么”。这类错误的题次占总错误的65.87%。我们认为,对包含除的“分配”的意义理解与否,是包含除的问题能否解答的先决条件。

第一阶段与第一项指标。被试不能解答的第二种情况是,他们看了(听了)题目之后,用题中二个数字相加的和来回答。这类错误的题次占总错误的7.92%。这时,被试对题目的“分配”的意义已有了理解,但未真正理解,他们不能把问题与条件联系起来。对二个数字在题目中的意义不理解,多数情况不知道总数是哪个数,不知道它是作什么用的。我们认为,认识包含除题目中的总数,并认识到总数的作用是被分配的,可以分解的。这是认识包含除的数量关系的第一项指标。

第二阶段和第二项指标。被试不能解答的第三种情况是,有的如同第二种情况,有的表现如解答第7题,他们进行笔算时书写为 $4+4=8$,而回答时却说“8里面有4个4”,不理解8分作二份时,一份是4。这类的错误题次占总错误的13.12%。其错误原因是儿童知道总数可以被分配,但如何被分配,用什么方法分配,没有被理解到。要突破这一思维困难,需要对“每份数”和“份数”有所理解。如果儿童对每份数的一份与一份的量之间的对应关系不理解的话,那末就不能用每份数的“单位标准”去分解总数。我们认为,认识包含除中的每份数是一份有多少元素,是从总数中分出来的一份,突出“一份”的观念,理解一份与一份的量之间的对应关系,利用每份数去分解总数,直至分完,并理解到把总数分解为多少份每份数就是总数包含多少份每份数。这是第二项指标。这项指标是认识包含除的数量关系的关键。

第三阶段和第三项指标。被试不能解答的第四种情况是,当所求份数超过3时,被试在解题时,情绪产生波动。如解答“18里面有几个2”时,有的被试畏难急躁,说“太多了,太长了,没有做过”(太多,太长是指2连加的次数)。这是被试由于紧张不能有次序的思维。还有的被试在作连加运算时,由于忘了总数而发生错误。这类错误题次占总错误的13.09%。其原因可能是,在总数被分解时,随着所求份数的增加,对思维的主体提出更高的要求。要求主体能够建构平行的二个等差数列的运算系统,即:第一个等差数列为份数从1份到2份、3份……若干份,相邻数相差为1,第二个等差数列为从1份的量到2份的量、3份的量……若干份的量,相邻数相差的值为每份数。二个数列平行对应。此外,在运算时,还要求主体,当二个数列同时每递增一次时,必须将第二个数列上的最后一

个数与题目中的总数相比较,时时不忘总数。当比较后认为它与总数相同时,那末与它相对应的第一个数列上的那个份数,就是总数包含多少份每份数的答案。我们认为,当包含除的题目中总数和所求份数偏大时,能够建构平行的二个等差数列的运算系统,运算过程中时时不忘总数。这是第三项指标。

下面举例说明达到理解第二项和第三项指标的表现。郑×, 6岁4个月。对第12题的运算过程是:“1个小朋友——4本书, 2个小朋友——8本书, 3个小朋友——12本书, 4个小朋友——16本书, 5个小朋友——20本书, 所以20本书能够分给5个小朋友。”又如许×, 6岁5个月。实验者在他解答第12题后接着问他:“28本书可以分给几个小朋友?”“因为20本书——5个小朋友,(那末)24本书——6个小朋友, 28本书——7个小朋友, 可以分给7个小朋友。”实验者见他对该指标掌握较好, 从难加试一题。“每个小朋友分得10个苹果, 80个苹果能分给几个小朋友?”他的回答是:“10个苹果分给1个小朋友, 20个苹果分给2个小朋友, ……80个苹果分给8个小朋友。”

(二) 对指标的掌握与认知条件的关系

在本文中已经指出, 儿童解答包含除的成绩主要因每份数和份数的多少的变化而受到影响。为了简略地说明问题, 我们参照图1的分类结果, 对补充实验中的每份数和份数的数量变化, 划分为四种认知条件的组合。图2是每个指标在四种认知条件中所处的地位和作用。

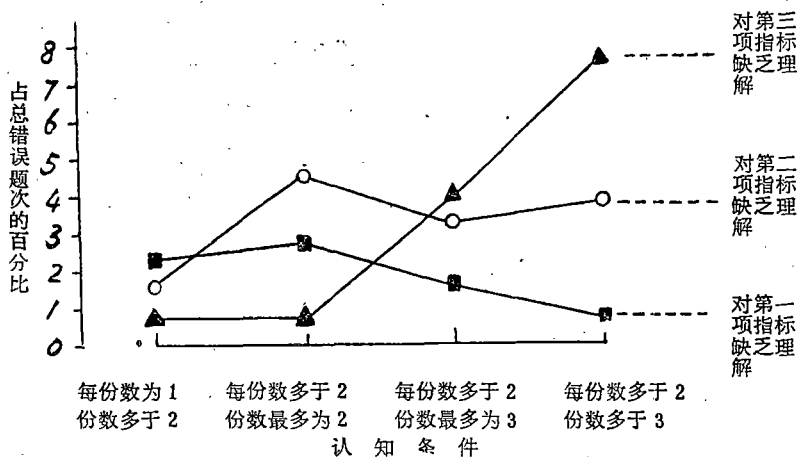


图2 理解包含除数量关系的指标, 在每份数和份数的数量变化的四种认知条件中的地位和作用

从图2中看到, 当儿童对包含除的“分配”意义理解之后, 在不同的认知条件下, 理解每个指标的要求是不一样的。在第一种条件下, 即每份数为1, 份数多于2时, 是否理解第一项指标是主要矛盾。符合第一种条件的题目, 有助于对第一项指标的理解。在第二种条件下, 即当每份数多于2, 份数最多为2时, 是否理解第二项指标是正确解答的关键。要理解第二项指标, 用符合第二种条件的题目训练儿童比较适宜。关于第三项指标, 它突出地表现在第三和第四种条件下。即是说, 当每份数多于2, 份数为3或大于3时, 不理解第三项指标则难以正确解答。为了使儿童达到对第三项指标的理解, 用符合第三和第四种条件的题目训练儿童, 效果要好些。

三、在用非除法运算解答包含除的活动中, 儿童理解数量关系的思维水平

儿童在用非除法运算对包含除的问题作出正确解答的过程中, 对包含除数量关系的理解有几种思维水平。将在实验中看到的多种解答方法, 归纳为如下三种水平。即: (一)非算术运算的方法; (二)连加同数或连减同数的方法; (三)数的同数分解组成的方法。表2是补充实验的一个结果, 三种解答方法在不同题目类别的认知条件下的发展。

表2 儿童用非除法运算解答包含除的三种方法在不同认知条件下的发展

正确题次 解答方法	认知条件	图 示 题	文 字 题	应 用 题	总 计
数的同数分解组成的方法		39	54	70	163
连加同数或连减同数的方法		48	110	89	247
非算术运算的方法		144	34	24	202
总 计		231	198	183	612

注: 总题次为24×36

非算术运算的方法。在图示题条件下的表现, 以解答第4题为例。有的被试把每4朵花划一个圈, 数一数有几个圈, 则回答用几个花瓶。有的被试在每4朵花后点一个小点作为标记, 数一数有几个小点, 则回答要用几个花瓶。有的被试在每4朵花后写一个数字, 开始数4朵花, 写上“1”, 接着数4朵花, 写上“2”, 直至最后4朵花, 写上“5”, 可直接从最后一个数字来回答要用几个花瓶。在文字题条件下的表现, 以解答“6里面有几个2”这一题为例。有的被试用手比划, 见图3。有的被试用画圆点然后分份的方法进行。在应用题条件下的表现, 以第12题的解答为例。有的被试是自己先画出实物图, 其数目与题中总数相同, 然后按每份数分份, 最后数出有5份, 则回答20本书能够分给5个小朋友。有的被试是画出代表实物的符号, 如直线或圆点, 然后分份和数一数有几份来回答。

连加同数或连减同数的方法, 主要表现在文字题和应用题的解答活动中。以解答第12题为例。有的被试是画出代表实物的“压缩性”符号, 如一个圆点代表每份数的值, 即4本书。一面画圆点, 一面作数的连加运算, 画出5个圆点, 也就是4连加5次等于20, 5个

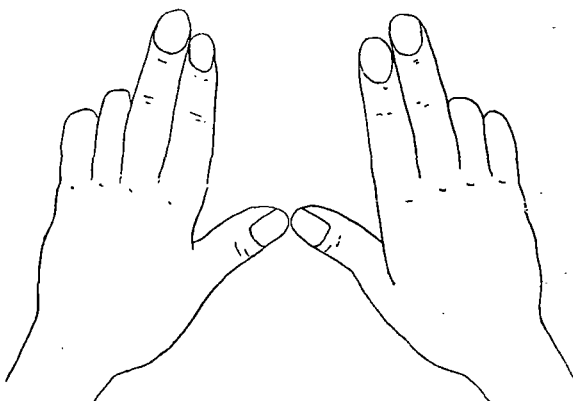


图3 儿童解答“6里面有几个2”时的动作表现

圆点表示20本书分给5个小朋友。有的被试不再画图, 而是直接写出每份数的值, 写上1个4, 表示1个小朋友拿4本书, 一面写数字, 一面作数的连加运算, 写上5个4, 就是4连加5次等于20, 表示20本书分给5个小朋友。有的被试能够直接进行笔算, 如 $4+4+4+4+4=20$, 或 $20-4-4-4-4-4=0$ 这些被试的解答活动已从非算术运算的方法过渡到算术运算的方法。但是, 实验中观察到, 6—7岁儿童

的算术运算能力还处在从逐一加算向按数群加算的发展过程中。

数的同数分解组成的方法,主要表现在应用题和文字题的解答活动中。如有的被试用“因为4加5次等于20,所以20本书分给5个小朋友”,或者“因为20里面有5个4,所以20本书可以分给5个小朋友”来回答第12题。又如解答“18里面有几个3”这一题时,被试回答:“因为3个3合起来是9,9和9合起来是18,3个3再加3个3,共6个3,所以18里面有6个3。”

从表2中看到,三种解答方法的正确题次,在全部正确题次中,分别为163,242,202。这说明6—7岁儿童用非除法运算解答包含除的解答方法中,连加同数或连减同数的方法上升为主导地位,数的同数分解组成的方法已有了一定的发展,而非算术运算的方法仍然是必需的。

从三种解答方法的发展,可以看出6—7岁儿童掌握包含除数量关系的思维水平的发展。用非算术运算的方法进行解答时,思维表现为“物质化”的,需要借助实物形象、符号象征的支持,在直觉行动思维水平和形象思维水平上把握总数包含多少份每份数这一关系。后来,经过若干小阶段,抽象能力提高了,“符号化”功能渐趋简化,发展到用数字连加或连减的方法进行解答。这时,儿童对包含除数量关系的理解,从非算术运算到算术运算,从外部活动到内部思维。以后,随着运算技能的熟练,大脑对运算过程及其结果加以概括,达到用数的同数分解组成的方法进行解答。这种方法已趋向“口诀化”。这时儿童对总数包含多少份每份数这一关系的把握,已从“一步一步的”加减运算的比较扩展的思维,发展到“一步的”近似口诀运算的较简捷的思维。

四、讨 论

1. 实验结果指出,6—7岁儿童用非除法运算解答包含除的高级的方法是数的同数分解组成。我们知道,数的分解组成是儿童对数的部分与整体关系的认知的综合表现。数的分解组成,是把看作为整体的一个数分解为二个或二个以上的部分数,以及把几个部分数组成为一个整体数。其中,把整体数分解为二个或二个以上的相同部分数及其组成,是数的分解组成的特殊形式,我们把它称之为数的同数分解组成。它在加减运算中表现为连加同数或连减同数。当它与乘除相连系时,跟一般的连加连减就有所不同,出现了“份数”这一数量。这时,对数的部分与整体关系的认知,进入了一个新的发展阶段,也是对数概念和运算概念的理解的进一步深化。因为,作为一个整体的数,既可以通过数的不相同的部分数的分解组成去认识它,又可以通过数的相同的部分数的分解组成去认识它。应该看到,数的同数分解组成,为儿童的运算概念从加减向乘除过渡,提供了转换的可能。如果说,数的分解组成,是构成加减运算的基础^{[1][4]},那末,数的同数分解组成,则应看作是构成乘除运算的基础。正如梅钦斯卡娅在《算术教学心理学》^[9]一书中曾经指出,“应当掌握数的组成知识,应当分解被除数,知道它与其它数的关系”,才能正确掌握除法。

2. 本实验用总数、每份数和份数的相互关系来表示包含除的被除数、除数和商的相互关系。我们认为,乘法和等分除的数量关系也能同样得以概括。总数、每份数和份数的相互关系是从乘法、等分除、包含除的数量关系中抽象概括出来的一种“基本结构”、“基本

原理”⁽⁹⁾。如果学生在学习乘除之前,掌握总数、每份数和份数之间的相互关系,那末,在学习乘除时,对于理解乘法和加法的关系、除法和减法的关系、除法和乘法的关系、等分除和包含除的关系,可能会容易些,有利于加速掌握乘除概念。至于包含除应用题的数量关系,例如总价、单价和数量的关系,距离、速度和时间的关系,总产量、工作效率和时间的关系,总产量、单位面积产量和面积单位的关系,等等,也同样可以用总数、每份数和份数的关系去概括和说明。

五、小 结

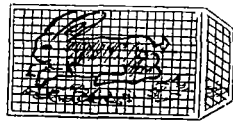
1. 本文对222名会二十以内加减但不会乘除的6—7岁儿童的非除法运算的包含除概念的发展,进行了调查。结果说明6—7岁儿童对包含除中数的部分与整体关系的认知已达到一定的水平,初步具有非除法运算的包含除概念。儿童用非除法运算解答包含除的方法,主要有三种,即:非算术运算的方法、连加同数或连减同数的方法、数的同数分解组成的方法。

2. 儿童达到对包含除数量关系的理解,要经过三个阶段。本文指出了达到每个阶段时的指标。

3. 本实验仅为初步调查,范围只涉及包含除。对儿童解答乘除的问题的思维特点,有待于深入系统的研究。

附 录

1. 每个笼子里放一只兔子



2 只兔子需要几个笼子?

(题目下面画 2 只兔子,图略)

2. 一个小朋友拍一个皮球



5 个皮球能给几个小朋友拍?

(题目下面画 5 个皮球,图略)

3. 每只船坐 4 个人



8 个人需要几只船?

(题目下面画 8 个人在河边,图略)

4. 每只花瓶插 4 朵花



20 朵花需要用几只花瓶?

(题目下面画 20 朵花,图略)

5. 2 里面有几个 1?
6. 5 里面有几个 1?
7. 8 里面有几个 4?
8. 20 里面有几个 4?
9. 一个司机叔叔开了一辆车子, 2 辆车需要几个司机叔叔?
10. 每个盘子里放一个扣子, 5 个扣子需要几个盘子?
11. 妈妈给弟弟 8 块糖, 弟弟每天吃 4 块, 弟弟几天把糖吃完?
12. 老师给每个小朋友 4 本书, 现在有 20 本书, 可以分给几个小朋友?

参 考 文 献

- (1) 刘范等: 心理学报 1979 第 1 期
- (2) H. A. 梅钦斯卡娅: 《算术教学心理学》第 268—284 页 孙经瀛等译 人民教育出版社 1962
- (3) 杰罗姆·S. 布鲁纳: 《教育过程》上海师范大学外国教育研究室译 上海人民出版社出版 1973 年
- (4) Jean Piaget: "The Childs Conception of Number" 1969 英文版

AN INVESTIGATION IN COGNITIVE DEVELOPMENT OF THE RELATION BETWEEN PART AND WHOLE IN CHILDREN —ON SOLVING PROBLEMS OF INCLUSIVE DIVISION NOT BY DIVISION METHOD IN CHILDREN OF 6—7 YEARS OF AGE

He Ji-quan

(*Institute of Psychology, Academia Sinica*)

Abstract

222 children of 6—7 were asked to solve problems of inclusive division of various forms. These children did not know multiplication and division methods.

The results indicate:

1) Children of 6—7 showed cognitive ability number relationship of part and whole but only to a certain level. Three different ways were used by the children in solving problems of inclusive division:

- a) By non-arithematical method.
- b) By successive addition or subtraction of equal numbers.
- c) By composition and decomposition of equal numbers.

2) The mastering of part and whole number relationship in inclusive division depends upon children's understanding of the relation between the total number, the number of set into which the total number is divided and the number of the elements in each set.

It was suggested that there are indications of the cognition of part and whole relationship of numbers.