

# 八至十五岁儿童交集概念 和解交集数学题能力的发展研究

——儿童认知结构发展变化的研究之一<sup>1)</sup>\*

刘 范

中国科学院心理研究所

赵 淑 文

北京师范大学

摘 要

本文探讨了8—15岁儿童掌握交集概念的发展水平及解答交集应用题的过程,分析了儿童认知过程中各认知成分的交互作用。

实验结果表明:小学儿童已具有掌握简单交集概念的心理基础;对交集的认知包括概念、表象、感知操作等成分的交互作用,其中表象、感知操作成分具有重要意义;儿童解交集课题是一种主动积极的认知活动,他们主动思考,采取策略,通过实物和图片的帮助而上升到概念水平上的理解。

## 一、问 题

集合是一些具有某种共同属性的元素的总称。集合概念是一个很基础的也很重要的数学概念。我国教学、科研工作者对集合的教学已给予相当的注意,例如有些实验教材中,适当渗透了集合概念<sup>[1]</sup>,并编入有关集合(包括交集)的专门章节<sup>[2,3]</sup>。

皮亚杰学派的研究曾相当广泛地涉及到集合问题。例如,他们发现,5—9岁儿童对不连续量(串珠)的守恒是从完全受感知的表面现象所支配,经过开始构成持久性集合(表面现象与一一对应的对抗),发展到各种关系的数量上的协调,从而确定集合的基数值<sup>[4]</sup>。他们把逻辑类和感知性集合区分开来,认为后者是以空间接近性和(或)相似性为基础的,不符合于类的内包和外延的要求<sup>[5]</sup>。其实他们所说的类和类的包含,就是集合和子集的关系。由于元素可以根据各种共同属性构成不同的集合,上述这种区分似乎并非集合的实质性区分。维果斯基的分类实验要求儿童将颜色、形状不同的木块分出高而宽、高而窄、矮而宽、矮而窄的子类,这里包含了交集的问题,高而宽的子类实质上就是高的子类和

1) 本文于1982年9月3日收到。

\* 本研究是全国儿童认知发展研究协作组工作的一个部分,研究方案是协作组共同制定的。

宽的子类的交集。

在我国过去的研究中,曾涉及基数问题,群与子群的关系问题<sup>[6]</sup>,也相当广泛地研究了儿童类概念的发展问题<sup>[7,8]</sup>,儿童对部分与整体的认知问题<sup>[9-13]</sup>,这都是同集合概念有联系的。可是没有对儿童交集概念的发展作专门的心理学的探讨。

本研究试图考查不同年龄儿童交集概念的发展水平,解答交集应用题的过程以及有关活动中各认知成分的相互作用,由此分析儿童认知结构的发展规律,并为探讨集合教学的有效途径提供心理学上的帮助。

## 二、方 法

试验采取个别方式进行。受试为小学每年龄组20人,初中每年龄组30人,共151人<sup>1)</sup>。年龄以10月范围的中点计。分别取自三种不同水平的中、小学,包括农村学校。另试验了少量高一和幼儿园大班受试作为对比。

经过预试拟定了三个不同难易程度的课题,第一、二课题包含一个交集,但数目大小不同,第三课题包含两个交集。前两题暗含三个答案,第三题暗含五个答案。每个课题分别以语言方式(视、听同时)、图片方式、实物操作方式进行试验,前一种方式完全通过者则不试后面的方式。受试每次作答后都要求说明理由,详细记录。约1/3受试同时录音以作校对。(具体材料及试验步骤见附录)

## 三、结 果

### 1. 儿童各试题的成绩

第1、2两题的1—3问都分别记0.3、0.7、1.0分;第3题每问记0.2分,满分1分。由于图片和实物都是在语言方式未通过或未完全通过的情况下才进行试验,因此被试少于实际人数,大都没有统计学的意义,故仅将语言层次的平均数制成图1。由图可见,儿童的成绩有随年龄上升的趋势。

### 2. 儿童对交集的认知水平

将受试的答案区分为三种情况:Ⅰ.在语言条件下通过或部分通过(利用其他试验方式亦无改进者,下同);Ⅱ.在图片或语言和图片的情况下通过或部分通过;Ⅲ.在实物、实物和语言,实物和图片,实物和语言与图片四种情况下通过或部分通过。

如果人为地把受试按通过各试题的人数百分数分为对交集未掌握(<25%)、开始掌握(25%—

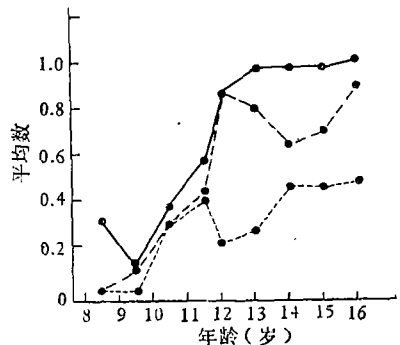


图1 儿童各试题(语言)的平均成绩  
题1——●—— 题2——□—— 题3——△——

1) 每组受试实际多于规定人数,共200人。由于入学年龄参差不齐,经检查发现有些受试不符合年龄要求,都予舍弃。年龄范围小学四年级以下以足岁5个月为中点计,其余以足岁为中点计。

50%)、部分掌握(50%—75%)、基本掌握(75%—90%)和完全掌握(>90%)五种情况;则从统计成绩可以看到,试题1,小学一、二年级已接近完全掌握;试题2,小学一、二年级未掌握,小学三、四年级部分掌握,小学五年级以上达到或接近完全掌握;试题3,小学五年级以上仍只达到部分掌握。


除有些受试是在概念水平通过试题外,还有些受试分别在概念与表象水平,概念、表象和感知操作水平通过试题,这更明显地显示出儿童对交集的认知是通过不同水平的认知成分的相互作用实现的,可视为发展的中间状态或过渡阶段。

### 3. 儿童解试题的过程

上面分析了儿童对交集的认知的量的方面,关于儿童认知的过程方面情况如下:

(1) 题1涉及的数量都不超出感知所能把握的范围,儿童大都能够通过。根据40名解题过程清楚的被试的材料,解题过程有:①20%的儿童通过概念推理解题。②70%的儿童通过在想象中具体分配解题,少数还在纸上画出来。这里多数是自己试验的性质,是有目的有计划的尝试,例如从左到右分,余下的又从头分;一种玩具从一头分,另一种玩具从另一头分等等。这也许更近似于所谓“过滤式的分析”(鲁宾斯坦)或者说在一定程度上掌握了“ $\rho$ 关系”(魏太墨)。只有极少数儿童自己绘图表现出试误。这类儿童解题时都有表象起着主导的作用,有的还根据表象自己绘图解题。③少数小学二年级以下儿童不能解题而要求其他外加条件,如“要5个球才能分”等。上述解题过程,第一种绝大多数见于初中受试;第二种小学儿童约占2/3,初中约占1/3。

(2) 解答题1只能说明儿童已了解两个集合的部分交叉,具有解决交集概念的认知上的基本条件,并不能肯定他们有了真正的交集概念。在解题2的35个典型受试中,有70%虽得出交集的人数,却将他们分属于两个组,或者说,“这二人或为数学组,或为语文组”;或者对自己的答案表示怀疑。14%的受试虽得出正确的答案,但是经过“凑数”而得出的。另外14%的受试才是正确理解和解答试题的,有的还提出了“人次”的概念。设参加数学和语文小组的学生分别为集合 $A$ 与 $B$ ,交集为 $X = \{ab\}$ 。大多数儿童虽然在概念水平上计算出参加两个小组的人数为2,但是并未了解 $X = A \cap B$ ,他不承认 $X \subset A$ 同时 $X \subset B$ ,却认为 $a \in A$ 而 $b \in B$ ,或 $X \subset A$ (或 $X \subset B$ )而 $X \cap B$ (或 $X \cap A) = \phi$ ,或认为 $A, B$ 中的 $\sim X$ 的元素数都是不定数。

(3) 题3中包含两个交集,成  的形式,从左到右依次表示参加数学、参加数学与作文、参加作文、参加作文和外语、参加外语的五种情况,分别标以 $a, b, c, d, e$ 。其中 $b, d$ 两个交集是问题的中心,它们是分别同时属于第一与第二、第二与第三个集合的子集。 $a, b, c$ 的结构与题2相同; $e$ 则可以由题中学生人数和参加数学与作文的人数直接算出;而 $c$ 则牵涉到两个交集,较 $a, e$ 难于把握。对44个解题过程较典型的受试进行分析,情况如下:约有62%的受试把握了整个问题的结构,解题先从两个交集 $b, d$ 开始,然后以不同的顺序去解决其余问题,或者先 $b$ 后 $d$ ,如 $b d e a c, b d a c e, b a e d c, b a d o e, b a o d e$ 等等。约26%的受试也把握了整个问题的结构,而从 $e$ 开始解题,如 $e d b o a, e o a b d, b a o d$ 等。还有10%的儿童解决了交集 $b$ ,得出 $b a c$ ,而后一个交集则在图片或实物操作条件下才获得解决。

(4) 根据解题过程较典型的38个受试的材料可以看出儿童解题时认知活动的倾向

性。这种倾向性大体可以分出三个类型：①虽然失败，也坚持通过算术或代数运算的方式解题，有的甚至在主试给予图画卡片或实物时也拒绝利用。这是一种“空洞思惟”的倾向。另外也有些儿童则相反，囿于图形或实物而不能概念化。②有效地利用图片或实物，不仅通过了试题，也初步领会了交集。有的在语言条件下未能通过试题，看到图片或实物时就恍然大悟。③主动采取策略解决试题，如用画片一端彼此重叠，或用手盖上属于交集的人数，或将属交集的小泥人放在两张分组卡之间，还有的自己做图帮助解题。

#### 4. 启发的作用

启发有两种形式：第一，初中学生从题 2 试起，如不能通过，则试题 1，然后再试题 2，就得到通过；甚至在这种情况下也通过了题 3。第二，用塑料卡片启发而会意，顺利了解了课题。看来这种试验的过程也是儿童学习的过程。

### 四、讨论和小结

本试验采取三种试验方式(语言、图片、实物操作)以分别引起主要是概念、表象和感知操作水平上的活动，以探查儿童认知交集的过程中所包含的各种认知成分，了解儿童解答交集课题的认知过程及其对交集中各个集合的实质的关系。但在试验中虽然从受试的成绩看题 1、2、3 表现出从易到难的顺序，但题 2、3 的对象(主语)都是学生，“参加什么”都是定语，而题 1 则引出了同样具体的三种对象(小朋友、小球、小碗)，使它与其他两题的交集从心理学上说并不是等值的，有些受试能解题 2 而不能解题 1，也许原因就在这里。这是本研究设计的一个缺点。

在本实验条件下，初步看到：儿童解决交集课题的能力随年龄而增长，因课题难易而异的趋势，小学儿童已具有掌握简单交集概念的心理基础。儿童解决了交集课题也并不必然就有交集的概念。交集认知中包含概念、表象、感知操作等成分的协同活动，其中表象、感知操作成分具有重要作用，在年幼儿童或课题较难时尤为明显；有些在语言试验条件下不能解题的儿童，在这两种条件下则顺利解决了课题。儿童解交集课题是一种主动积极的认知活动，他们主动思考，采取策略利用图片和实物，通过实物和图片的帮助而上升到概念水平上的理解。还有少数儿童养成了按数学公式运算的习惯，却并不理解所得结果的实际意义；有的还拒绝利用给予的图片或实物，有的则相反，陷于图片、实物而不能在概念上理解交集，这是“空洞思惟”的倾向或囿于直接认知的倾向，都是教学上所应注意的。

#### 参 考 文 献

- 〔1〕 中学数学实验教材编写组，中学数学实验教材，第一册(上、下)，北京师范大学出版社，1981年。
- 〔2〕 中央教育科学研究所教学改革实验小组，初中实验教材，代数和初等函数，第一册，(过渡试用本)。
- 〔3〕 中学数学实验教材编写组，中学数学实验教材，第二册第一分册，1981年。
- 〔4〕 Piaget, J. and Szeminska, A., *The Child's Conception of Number*, Routledge and Kegan Paul Ltd London, 1952.
- 〔5〕 Inhelder, B. and Piaget, J., *The Early Growth of Logic in the Child: Classification and Seriation*, Routledge and Kegan Paul Ltd, London, 1964.
- 〔6〕 幼儿数概念研究协作组，心理学报，第 1 期，1979年。
- 〔7〕 刘静和、王宪钊等，心理学报，第 4 期，1963年。

- (8) 王宪钿、刘静和等,心理学报,第4期,1964年。  
 (9) 王宪钿、张梅玲等,北京心理学会1980年年会论文。  
 (10) 张梅玲,心理学报,第1期,1980年。  
 (11) 林嘉绥,心理学报,第2期,1981年。  
 (12) 何纪全,心理学报,第1期,1982年。  
 (13) 刘静和、王宪钿等,心理学报,第3期,1982年。

### 附录: 试验材料及步骤

#### 材料:

##### 一、课题卡片——三张,分别书写下列三课题:

1. 有5个小朋友,老师先拿3个小碗,再拿4个小球给他们玩。每个小朋友至少拿到一个;有的可以拿两个,但拿的两个不能都是小球,也不能都是小碗,只能是一个小球和一个小碗。请你告诉我:(1)又拿到小碗又拿到小球的有几个小朋友?(2)只拿到小碗的有几个小朋友?(3)只拿到小球的有几个小朋友?

2. 有30个小学生,都参加了课外小组。其中参加数学小组的有8人,参加语文小组的有14人。问:(1)又参加数学小组,又参加语文小组的有几人?(2)只参加数学小组的有几人?(3)只参加语文小组的有几人?

3. 一个班有15个学生参加数学、作文、外语三种竞赛。其中参加数学竞赛的8人,参加作文竞赛的6人,参加外语竞赛的4人。他们每个人至少参加一种竞赛,有的还参加了数学和作文两种竞赛或作文和外语两种竞赛。已经知道参加数学和作文竞赛的(包括只参加一种竞赛和参加了两种竞赛的)一共有12人。问:(1)只参加外语竞赛的有几人?(2)只参加作文竞赛的有几人?(3)只参加数学竞赛的有几人?(4)既参加数学竞赛、又参加作文竞赛的有几人?(5)既参加作文竞赛,又参加外语竞赛的有几人?(注:本题中五个问题分别用小卡片抄写。试验时先让儿童完全弄懂题意,再将五个问题随机排列顺序,同时呈现,以便探讨儿童解题过程。)

##### 二、图画卡片——分别画下述内容

1. 五个小娃娃(1×5排列); 2. 三个小碗(1×3); 3. 四个小球(1×4); 4. 三十个小朋友(3×10); 5. 十八个小朋友(3×6),卡片下方书“数学小组”; 6. 十四个小朋友(2×7),卡片下方书“语文小组”; 7. 十五个小朋友(3×5); 8. 八个小朋友(2×4),卡片下方书“数学竞赛”; 9. 六个小朋友(2×3),卡片下方书“作文竞赛”; 10. 四个小朋友(1×4),卡片下方书“外语竞赛”。

三、分组卡片——用较大卡片两张,分别书写“语文小组”、“数学小组”。又三张,分别书写“数学竞赛”、“作文竞赛”、“外语竞赛”字样。

##### 四、实物——很小的玩具小娃娃30个,玩具小碗3个,玩具小球4个。

##### 五、启发卡片

1. 用5张透明塑料薄版,分别绘制图画卡片5、6、7、8、9、10的内容。图中小朋友的排列要求卡片5、8右方的二人分别可与卡片6、9左方二人完全重叠而符合为一,卡片9右方一人可与卡片10左方一人完全重叠而符合为一。

2. 卡片一张,各绘相交的两个圆,分别作为课题1、2的图解;另一张,绘相交成串的三个圆,作为课题3的图解。各圆的面积和相交面积的比例要求大体与各课题内容一致。

##### 六、记录表格,备录音机一架。

#### 实验步骤:

##### 个别试验。以三种方式呈现课题:

一、语言(口头与书面同时): 将课题卡片放置受试面前,同时主试按书面讲解课题的内容,反复讲解,直至受试表示已完全理解为止。然后,问卡片下方的几个问题(注意:题3在受试完全理解课题条件之后才按随机顺序呈现五个问题),要求受试回答(回答顺序不作规定),回答后要求受试申述理由。受试回答过程中如有必要,可进行适当的询问。详细记录受试的一切活动。

二、图片: 在以语言形式呈现的条件下不能答对或不能全部答对各问题时,改用图画卡片呈现,相应的图片平置受试前面,结合少量的说明。然后要求受试回答各个问题。详细记录答案和受试可能的其它活动。

三、实物: 题2、3在以图片呈现的条件下不能答对或不能全部答对所提出的各问题时则实物呈现。将相应的分组卡片平置受试前面,结合少量说明。将相应数目的实物一面数一面放在桌面上,使受试确信数目正确(可以和受试共同进行),然后加以说明如“这里是××个小学生”。并要求受试:“现在请你按照题目的要求把他们分到各个组里去。”(仍将课题卡片放在一侧,受试随时可以再看)在受试自认为摆对时,要求他回答所提的问题。详细记录受试答案和操作活动。题1是让儿童直接去给小人分配玩具。

最后,在上述三种呈现的条件下受试不能解答或不能全部解答各问题时,可作进一步的启发,以考查他接受交集概念的可能性,将结果另行记录于备注中。启发的方法取下述三者之一:①主试协助完成上述第三种呈现条件下的操作;②应用启发卡片1;③应用启发卡片2。此外,受试开始不能完成题2,改作题1后再回头做题2所得结果,亦作为启发的结果计算。

A STUDY ON THE DEVELOPMENT OF 8-15-YR OLDS'  
CONCEPT OF INTERSECTION SET AND THEIR  
ABILITY IN RESOLVING INTERSECTION  
PROBLEM—STUDIES ON THE DEVELOPMENT  
OF CHILDREN'S COGNITIVE STRUCTURE(I)

Liu Fan

*(Institute of Psychology, Academia Sinica)*

Zhao Shu-wen

*(Beijing Normal College)*

Abstract

The purpose of this study is to explore the developmental levels of 8-15-year-old children's concept of intersection set and the process of their resolving intersection problems, analysing the interaction of various components in children's cognition. 151 subjects were tested with three intersection problems in different degrees of difficulty, presented through words, pictures and physical objects.

As the results suggested: Primary school pupils had the mental factors for mastering simple intersection sets. In the cognition of intersection by 8-15-year-old children there exists interaction of concepts, images and sensori-motor manipulations, and the latter two play an important role in it. The process of resolving intersection problems is an active one: the subjects ponder actively, make strategy, and form related concepts by the help of pictures and manual manipulations.