心 理 学 报
第1期 ACTA PSYCHOLOGICA SINICA 1983 年

关于5至11岁儿童对几何图形的部分与整体关系的认知发展的实验研究[1)*]

何纪全 刘静和 王宪钿
中国科学院心理研究所

一、目 的

关于儿童数概念发展的问题，我们经过几年的实验研究[(1),(2),(3),(4)]，运用辩证唯物主义的观点，概括出十二项指标[(5)]，标志着儿童在数及数学上对部分与整体关系的认识发展。数和形是小学数学的两个基本方面。本研究将通过对5至11岁儿童的图形认知活动的剖析，进一步考察十二项指标在儿童形概念发展方面的思惟过程及其特点。

二、方 法

被试 5至11岁男女儿童共200名。分10个年龄组，每个年龄组内的年龄相差最大不超过两个月。被试来自北京市三所幼儿园和三所小学。

1. 测查项目：

以十二项指标作为测查内容。见表1。本实验由十二个测查组成。

2. 材料和方法：

第1、2、3、4、5、6项指标的测查材料，共用一个圆形和二个半圆形的图形。被试看图回答如下问题。指标5的提问是，一个圆形图形可以分割否？圆形图形从中间分开后会变成什么图形？指标2的提问是，一个圆形图形分开后，还可以再合起来否？几个半圆形可以合成一个圆形？指标6的提问是，什么图形分成两半后可以得到半圆形？指标1的提问是，一个圆形可以分成几个半圆形？指标3和指标4的提问是，一个圆形与一个从圆形中分出来的半圆形相比，哪个大？哪个小？还是两个一样大？为什么？

第7项指标的测查，所用材料，如图1所示。标准图形的大小为$9cm^2$。

实验时，被试先对比较图（1）、（2）、（3）、（4）、（5）逐个与标准图形作出比较，指导语为"你看这两个图形，哪个大？哪个小？还是两个一样大？"然后将比较图（1）、（2）、（3）同时呈现，指导语为"这里有四个图形，哪个大？哪个小？还是它们一样大？"当被试回答正确时，主试再提出如下问题：① 标准图形可变为图形（1）、（2）、（3）否？② 图形

1）本文于1982年6月21日收到。
* 本研究得到一机部幼儿园、进口大楼幼儿园、气象局幼儿园和百万庄小学、新兴小学、文兴街小学的老师的支持，谨此致谢。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 1　测查项目的指标符号以及在本实验中的意义

指标编号	指标符号	意义	指标编号	指标符号	意义
1	$A=a+b$	认识一个圆形包含两个半圆形	7	$A=a+b+c$ $=c+a+b$	认识整体图形的大小、不受部分图形的空间位置变化的影响。
2	$a+b=A$	认识被分割后的图形可以复原，变回到原来的图形，两个半圆合成一个圆形	8	$A=(a+n)+$ $(b-n)$	认识在整体图形的大小不变条件下，图形的一部分扩大（或缩小），另一部分图形则缩小（或扩大）。
3	$A>a$	认识圆形大于从圆形分出的半圆形	9	当 $A=a+b$ 时 $a=A-b$ $b=A-a$	当整体图形分为两个部分时，一个部分和另一部分的互补关系。
4	$a<A$	认识从圆形分出的半圆形小于圆形	10	$A=\{a,b,c,d\}$ $=(a,b)+(c,d)$	认识 1 代表整体图形，1又可以代表部分图形，1又可以代表几个部分图形联合的小于整体的图形。
5	$A\supset a$	认识圆形图形可以分割，圆形包含半圆形	11	A a　b a_1　a_2　b_1　b_2	认识对整体图形可以分为部分，对部分图形也可以作为整体，又可分为部分。
6	$a\subset A$	认识半圆形来自圆形的一半，半圆形被包含于圆形	12	当 $A=n\cdot a=M\cdot b$ 时， 若 $N>M$，则 $a<b$ 若 $N<M$，则 $a>b$	能照一个长方形图形，作出大小相等的其它长方形图形，认识在图形大小不变条件下，长宽变化的补偿关系。

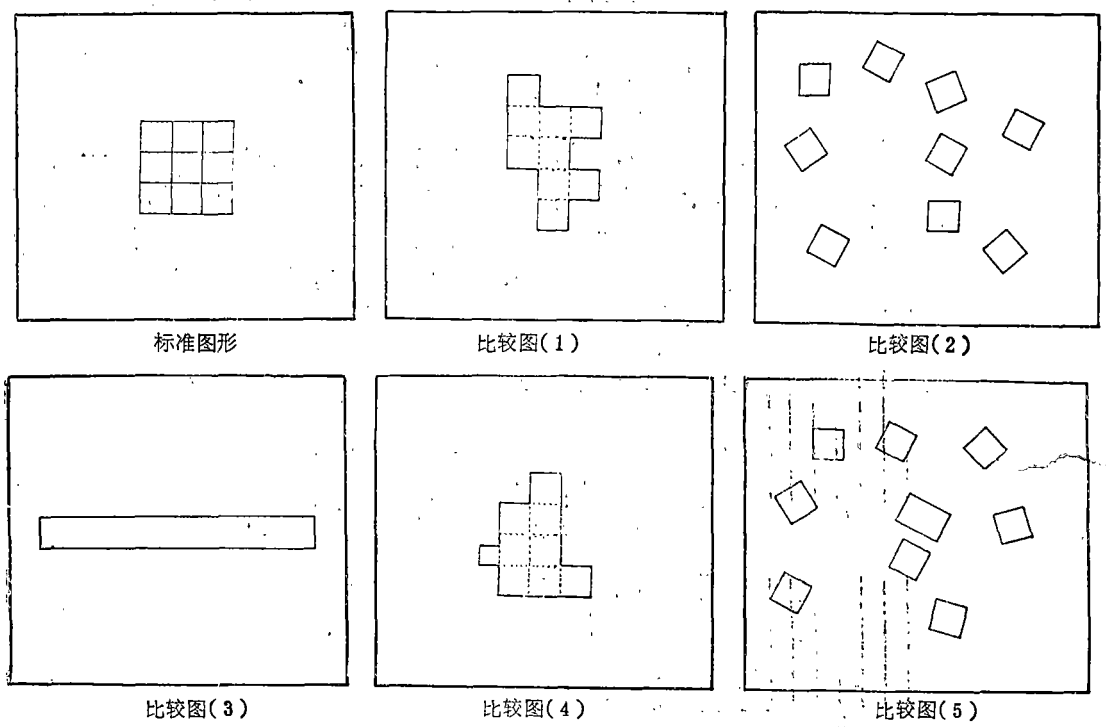

图 1　指标 7 测查时使用的图形

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(1)、(2)、(3)还可变回到标准图形否？③标准图形除了能变为图形(1)、(2)、(3)外，还能否变为其它的图形吗？④为什么图形(1)、(2)、(3)与标准图形比较，形状变了，其大小还与标准图形一样？当被试的解释有矛盾时，用图形(4)、(5)激发被试的思惟。

第8项指标的测查，所用材料比喻为有一块土地，分成8小块，种土豆和小麦，不能有空地，原来4块种土豆，4块种小麦，现在小麦少种一块，问被试，这时土豆如何种？种几块？被试正确回答后进一步解释为什么小麦少种一块，土豆就要多种一块的理由。

第9项指标的测查，指导语为要围一块地，使它和标准图形一样大，它已围了一部分，剩下的另一部分如何围？被试正确回答并在方格纸上作图后，要求说明所作的图与标准图形是否一样大？

第10项和第11项指标的测查，所用材料如图2所示。指标11测查时，要求被试对一个正方形图形，指出它可以分成多少个"提示图形"。指标10的测查以被试的反应方式为结果。

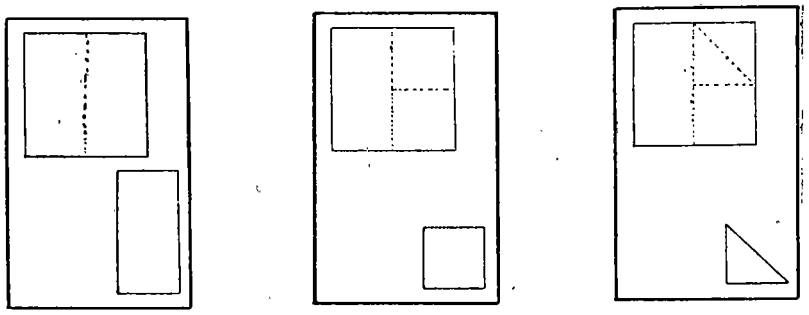

图 2 指标11测查时用的图形

第12项指标的测查，所用材料如图3所示。要求被试在方格纸上利用已划出的一条边，作出与标准图形大小相等的4个长方形图形。完成作图后，用排队时的排数和每排人数比喻，要求被试看图列出乘法式和除法式，并说明式子的意义。要求被试比较所作的图形①、②、③、④的变化，解释为什么在这4个图形中，排数减少，每排的人数则增加，或者相反，排数增加，每排的人数则减少。

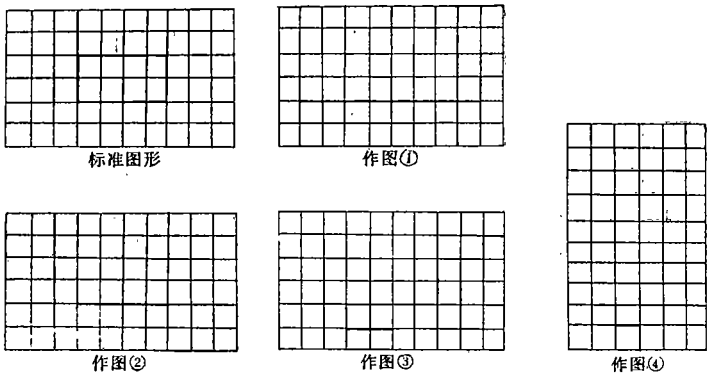

图 3 指标12测查时使用的图形

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

以每项指标的通过人数和成绩作为数据。成绩皆由每项指标的各自评分结果转化为百分数，以便统一比较。

三、结　　果

1. 十二项指标在儿童图形认知活动中的层次结构

在本实验条件下，5 至11岁儿童在比较几何图形大小的活动中，每项指标的成绩高低和通过人数的多寡，在十二项指标之间的难易趋势上是基本一致的。其结果如下：

指标编号：	3	4	5	1	6	2	11	9	10	7	8	12
平均成绩：	95	95	94.3	93.5	86	82.3	77.7	72	64.1	63.8	50	28.6
通过人数：	190	190	187	186	171	164	148	132	113	102	57	31

十二项指标按其难易次序，用数量分类法，可分为四个层次。第一层次包括指标第3、4、5、1等四项，第二层次包括指标第 6、2 等二项，第三层次包括第 11、9、10、7 等四项，第四层次包括指标第8、12等两项。四个层次之间的相邻关系，第二层次的距离系数（D）是第一层次的 2.25倍，第三层次是第二层次的 2.22倍，第四层次是第三层次的 1.48倍。这表明层次之间难易上的质的差异性，以及儿童对部分与整体关系理解发展的阶段性。

2. 儿童掌握十二项指标与年龄的关系

相邻年龄组之间的成绩差异，统计检验结果如下：6 岁半组与 6 岁组相差为 78.4－52.6＝25.8，t＝5.02，$p<0.001$；8 岁组与 7 岁半组，86.8－81.9＝4.9，t＝3.29，$p<0.01$；11 岁组与10岁组，98.4－94.6＝3.8，t＝3.90，$p<0.001$。其它相邻年龄组间的差异未见显著。可见，5 至11岁儿童对几何图形的部分与整体关系的认知发展，其年龄转折点在 6 岁与 6 岁半之间和10 与 11岁之间，以及 7 岁半与 8 岁之间。

指标层次的发展与年龄的相互关系，见图 4 。从图 4 中看到，每个层次的指标，从开始掌握经过持续时间到终结的年龄是不相同的。一般说来，第一层次的指标在 5 岁之前已有一定的发展，在 6 岁半时达到终结；第二层次的指标在 5 岁前有所发展，6 岁后发展迅速，6 岁半时达到终结；第三层次的指标在 5 岁时开始被认识，6 岁后迅速发展，10岁时基本达到终结；第四层次的指标在 7 岁半后开始被认识，发展迅速，但11岁时尚未达到终结。

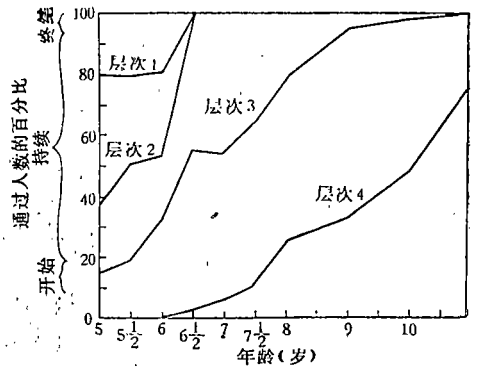

图 4　十二项指标的层次发展趋势

3. 儿童在图形认知活动中对部分与整体关系理解的某些思惟特点

（1） 指标 7 的掌握水平随认知方式的发展而提高　在指标 7 的测查中看到，儿童对比较图（1）、（2）、（4）、（5）与标准图形的比较，是采用“直接看”、“拼图还原”、“数数量”、“数方格”等四种认知方式来辨认的。见表 2 。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

表 2 儿童比较几何图形大小的认知方式的发展

被试 \ 要求方式 比例*及百分数	通过辨认比较图(1)、(2)、(4)、(5)与标准图形的大小					通过测量比较图形(3)与标准图形的大小		
	不会辨认	直接看	拼图还原	数数量	数方格	不会测量	直接测量	间接测量
10岁后—11岁(20人)	0	0	0	0	1.00/100	0	0	1.00/100
7岁半后—10岁(60人)	0	0.05/18.2	0.14/70.6	0.16/92.3	0.65/100	0	0.02/100	0.98/100
6岁后—7岁半(60人)	0	0.20/16.3	0.25/45.9	0.17/80.0	0.38/100	0.03	0.33/100	0.64/100
5岁—6岁半(60人)	0.13	0.32/14.1	0.15/68.6	0.13/66.7	0.27/100	0.40	0.50/100	0.10/100
合计(200人)	0.04	0.17/16.4	0.16/59.5	0.14/80.7	0.49/100	0.13	0.26/100	0.61/100

* 比例是指每年龄组对图形进行比较时使用几种认知方式的次数之比。百分数是指每年龄组的某种认知方式的正确次数的比值。

"直接看"，被试常以自己过去的经验作为判断依据，如"正方形就是大的"，"变了就小了"，"边长些，就是大的"，"分散就变大了"等等。判断的正确率显得很低，仅 16.4。这一辨认方式多为5—6岁儿童使用，8 岁后基本上不再使用。

"拼图还原"。被试采用这一辨认方式主要有两种表现形式。其一是，被试在头脑中把比较图加以拆拼，还原到标准图形的形状，然后作出判断；其二是，被试将比较图中的方格与标准图形中的方格一个一个地进行比较，然后作出判断。这一辨认方式多为 6—7 岁儿童使用，其正确率达 59.5。

"数数量"。被试单纯从"量"出发，去判断图形的大小。其判断成绩较前两种辨认方式为高。

"数方格"。被试用方格作为"单位"，去判断图形的大小。多数 8 岁儿童及所有 11 岁儿童能掌握这一方式。

对图形③与标准图形的比较，是通过测量方式进行的。儿童的测量方式有直接测量和间接测量二种。直接测量，是把标准图形上的全部方格上的方块（用塑料方块）覆盖到比较图上，然后作出判断。这一方式主要表现在6—7岁儿童身上。间接测量，是把标准图形上的一个方块作为"单位"，利用它测量比较图形，用"单位"的重复数量作出判断。这一方式在 8 岁后达到完全掌握。可见，儿童的直接测量能力与"拼图还原"认知方式有关，间接测量与"数方格"认知方式有关。

（2） 认知方式和年龄对学习效果的影响 在指标 7 的测查中，针对被试使用"直接看"、"拼图还原"、"数数量"三种不同认知方式的情形而采取不同的启发方式。被试经启发得到学习，学习后再测查的反应可分为三种水平。一为启发无效，二为"不能返回"，即是指被试经学习后，会正确反应了，但当去掉启发用的实物或不再给予提示，重新再测查时，被试又不会正确反应。三是"能够返回"。学习效果的结果见表 3 。

从表 3 中看到，认知方式的思惟水平愈高，启发的收效则愈大。学习的效果又与年龄有关，6 岁以前的儿童，启发的收效较差，6 岁以后，学习效果则好些，7 岁半以后的儿童，

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 3　在不同认知方式和不同年龄中的学习效果

百分比* 效果 / 因索		启发无效	“不能返回”	“能够返回”
认知方式	数数量	9.5	0	90.5
	拼图还原	7.9	7.8	84.3
	直接看	38.3	13.1	48.6
年龄阶段	7岁半后—10岁	0	0	100
	6岁后—7岁半	9.9	11	79.1
	5岁—6岁	45.4	14.9	39.7

* 百分比是三种学习效果的反应次数占启发前错误次数的比例。启发前错误次数不包括根本不会辨别的次数。

一经启发，就能掌握“数方格”这一方式。

（3）图形特征对认知方式的影响　1）连续图形与分散图形的比较。在指标7的测查中，比较图（1）是部分连续的，比较图（2）是部分分散的。全体被试对连续图形使用“直接看”和“拼图还原”的认知方式的次数（占全部反应次数的14%）比分散图形（27%）为少，但正确百分数，连续图形（63.6）高于分散图形（25.6）。并且，对连续图形使用“数数量”和“数方格”的认知方式的次数（35%）比分散图形（21%）为多。

2）大小相等的图形与大小不等的图形的比较。在指标7测查中的比较图（4）和比较图（5），是与标准图形大小不等的图形，比较图（1）和比较图（2）是与标准图形大小相等的图形。儿童对大小不等的比较图形在辨认时使用“数方格”方式的次数（62.3%），比大小相等的比较图形（35.3%）高得多。并且，它主要表现在7岁半以后的儿童身上。

3）分格图形与不分格图形的比较。指标7测查用的比较图（3）是连续的、内部不分格的。儿童对比较图（3）很难通过辨认作出判断。从表2中看到，6岁后的儿童对不分格图形使用间接测量方式的比例，要比对分格图形使用数方格方式高些。

（4）思惟的全面性在儿童对部分与整体关系的理解过程中的发展　在第7、8、12等三项指标的测查中，被试对自己的正确回答作出解释，解释的水平可划分为四个级别。具体内容分述如下：

指标7。①说不出理由；②认为比较图形是从标准图形变来的，大部分被试还认为比较图形可以变回到标准图形，标准图形能变化更多的图形；③认为比较图形与标准图形包含的方格一样多，或者说方格的大小一律。经启发，能把两个理由综合说明；④同时把握两种认知成份，从方格的大小和份数来说明标准图形与比较图形的大小。语言表达清楚、圆满。

指标8。①说不出理由，或者说些无关的理由；②认为小麦少种一块地，会（留）有空地，不能空地，就要多种一块土豆；③只认为小麦少种一小块地，4块小麦地变成3块，要补上，就得多种土豆；④认为小麦地和土豆地是合在一块地上的，总的地有8小块地。虽然总的地不变，但小麦地和土豆地可以变，小麦少种一块，土豆就多种一块。

指标12。①说不出理由；②复述每排人数与排数之间一增一减的现象；③认为作图

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(1)与(4)是竖与横的关系,大小是一样的,作图(2)与(3)也是竖与横的关系,大小是一样的。对于作图(1)、(4)与(2)、(3)之间的关系,却不能说明;④认为作图(1)、(2)、(3)、(4)都是按标准图形,方格的数一样多,所以有排数与每排人数之间的增减变化规律。如果总的人数不等,这个变化规律就不适用。

上面三项指标的第4解释级别,其共同点是,儿童已同时把握二维认知成份,对"部分的变化"与"整体不变"的对立统一关系,已能够从全面的和发展的观点去分析。从年龄发展看,实验结果指出,第4解释级别的通过人数,5—6岁儿童不到20%,6—7岁儿童在32%以下,8—10岁儿童不超过75%,11岁儿童对指标7能够全部通过,指标8达到85%,指标12达到70%。

本实验指出的解释级别,从第一级别发展到第4级别,表明了儿童思惟全面性发展的一个过程。同时,从一个侧面揭露了儿童辩证思惟的发生发展。

四、讨 论

1. 实验结果指出了十二项指标可划分为四个层次。从部分与整体的相互关系看,第一层次概括为整体的可分性和整体对部分的包含关系,以及整体与从整体中分出的部分之间的大小关系。第二层次概括为部分对整体的被包含关系和部分相加等于整体。第三层次概括为从整体中分出的部分具有再分性、整体对部分的相对性、以及整体的大小不受部分在空间上的变化,又及整体中一部分与另一部分之间的互补互逆关系。第四层次概括为整体中一部分与另一部分之间的增减关系和补偿关系。这种层次结构的发展,反映了儿童在图形认知活动中,对部分与整体关系的认识是由浅入深地发展的。

2. 实验结果指出了儿童判断几何图形大小的四种辨认方式。直接看——是一种直觉推理;"拼图还原"——是一种依靠图形意象进行分析综合的具体思惟;数数量——是一种借助于数数把握图形大小的运演;数方格——是一种比较完善分析综合的逻辑推理。四种辨认方式的成绩,除数数量外,与年龄无关。总的看来,儿童在8岁以后,对图形大小的认识,能够对"单位"(方格)和"份数"二维认知成份同时加以抽象概括,协同运演,理解到图形整体大小不受部分在空间上变化的干扰。这一结果与皮亚杰的论述是一致的。

"拼图还原"和数数量,看来是介乎直接看和数方格之间的过渡形态。儿童使用"拼图还原"时,可以看到儿童对图形重新组合,运用"预料的图式",不致于"忘掉整体"。"数"和"方格"已发生潜在作用。正如被试在实验中接受启发学习,"拼图还原"的"能够返回"的效果一下子从直接看48.6上升到84.3。这说明"拼图还原"这一旧的认知方式在儿童启发学习中直接转化为新的认知方式——数方格。儿童使用数数量这一辨认方式时,或者把"方格"作为第二依据,或者忽视它的参照价值。但我们从表2看到,数数量的判断成绩从5—6岁的66.7上升到8—11岁的92.3,这一特点是其它辨认方式所没有的。这说明数数量这一辨认方式本身处在从单纯"量"出发到以数和单位相结合为依据的演化中。上述"拼图还原"和数数量的过渡作用,似乎可说明儿童在图形认知活动中,由直觉推理向逻辑推理的发展过程。

3. 整体不变性,照皮亚杰[6]的观点认为,儿童对整体的认识,不管其部分如何排列

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

和组合，整体的非本质特征可以改变而本质特征不变。在本实验中，几何图形的部分改变大致有以下三种形式。（1）整体图形包含的部分在空间上的位置和在空间上的排列的变化，以及在空间上的分散与集中；（2）整体图形中的一部分与另一部分之间的互补和增减等方面的变化；（3）整体图形如正四边形的长宽比例，三角形的高底比例的补偿方面的变化。儿童要达到对整体不变性的认识，则要求克服上述的部分变化产生的影响。从实验结果看来，儿童达到对整体不变性的认识，以对部分变化的一定认识为条件，而儿童对部分变化的特点的认识又以对整体不变性的认识为前提，二者是密不可分的。我们认为，儿童对十二项指标的掌握，其本质是儿童在层次不同的发展水平上，对整体不变性认识的提高。

4. "单位"，是把整体分为若干相等部分的一个部分作为计量标准。在"6—7岁儿童用非除法运算解答包含除的实验"一文中指出，掌握每份数（把一份的数看作单位数）是掌握总数、每份数和份数相互关系的关键。在本实验中，又一次说明了，"单位"的重要作用。如果图形大小，不用"单位"计数，间接的比较活动就无法进行。由此，从数和形两种认知活动方面，都揭示了"单位"概念在部分与整体关系中是基本的和首要的概念之一。

五、小　　结

1. 本实验调查了5至11岁儿童在几何图形大小的认知活动中，理解部分与整体关系的十二项指标的发展。结果指出，按其难易程度，十二项指标划分为四个层次。第一层次概括为包含关系，第二层次为被包含关系，第三层次为互补可逆关系，第四层次为增减和补偿关系。

2. 每个层次指标的年龄发展，各有其起始、持续、终结阶段。6岁半儿童能够掌握第一和第二层次，10岁时能够掌握第三层次，第四层次的指标到11岁后才能实现终结。

3. 影响儿童理解几何图形的部分与整体的关系有各种因素，比较复杂。实验中发现，如儿童认知方式的提高，图形本身特征、学习和年龄以及经验等方面。还有数的运演能力和认知态度。

参　考　文　献

〔1〕王宪钿等，儿童心理与教育心理，第2期，19页，1980年。
〔2〕张梅玲，心理学报，第1期，37页，1980年。
〔3〕林嘉绥，心理学报，第2期，159页，1981年。
〔4〕何纪全，心理学报，第1期，41页，1982年。
〔5〕刘静和等，心理学报，第3期，263页，1982年。
〔6〕Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A., The Child's Conception of Geometry, Translated by E. A. Lunger, New York, Basic Books, 1960.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net