

关于儿童对部分与整体关系认知发展的实验研究

——促进小学儿童乘除概念的形成

何纪全

(中国科学院心理研究所)

韩 茹

(北京市西城区新兴小学)

一、目的

本研究是在小学数学教学中进行的一个教学实验。目的在于,探讨在部分与整体关系思想的支配下组织起来的知识结构,对于学生掌握知识,发展智力是否具有促进作用。为小学数学教学的改进提供某些依据。

二、对象、方法

本研究是在北京西城区新兴小学一年级第二学期的一个班上进行的。对比班Ⅰ是市重点学校的。对比班Ⅱ是与实验班同校的。为了扩大比较,在实验后期,又选了对比班Ⅲ(为另一所市重点学校的)和对比班Ⅳ(为另一所普通学校的)。

对比班的教材是十年制学校小学数学统编课本。实验班采用自编实验教材。自编教材为三部分内容。第一部分讲授总数、每份数和份数之间的三数关系,第二部分讲授表内乘除及有余数的除法,第三部分讲授乘除应用题。实验教材的基本特点是:(1)先学习基本原理,后学习运算法则,随后才是应用题。用总数、每份数和份数的相互关系去理解乘除的数理知识。(2)强调乘法与加法、除法与减法,除法与乘法之间的可逆性联系。(3)讲了2—4的乘法口诀之后,5—9的口诀一并出现给学生,不再一个一个地讲。对一句口诀要理解到相应的二个乘法式、二个除法式及二个加法式。(4)乘法领先,等分除和包含除同时跟上。编题训练中突出乘除可逆,一题多变。通过归类比较,培养学生应用总数、每份数和份数三数变化的原则,去分析应用题的数量关系的思维能力。

整个实验阶段,包括实验前的摸底测查共安排5次测验。主要测验卷是与西城区小学数学教研室教师一起拟定的。根据测验成绩和个别询问纪录,分析学生掌握乘除概念的过程及其特点。

本研究是在刘静和,王宪细指导下进行的。

本研究曾得到新兴小学领导和老师们、西城区小学数学教研组的帮助,北京市第二实验小学,景山学校,二里沟小学校曾予以协助,特此致谢。

三、结果分析

一、对部分与整体关系的理解与提高学习成绩的关系。

表1 实验班与对比班的各次测验成绩对照

百分数 班级	测验	实验前 摸底测验	学完2—4的 乘法口诀	学完2—6的 乘法口诀和 等分除法	学完表内 乘除法	学完表内乘除 后二个月
		第1次	第2次	第3次	第4次	第5次
实验班(26人)		77.5	98.8	98.0	97.3	93.2
对比班I(43人)		89.1***	97.1	97.2	95.6	88.8
对比班II(26人)		82.3*	87.8***	90.7**	94.6	81.3***

说明：(1)测验时，个别学生因故未到校，每次测验的人数不固定。

(2)实验班与对比班(I或II)的成绩差异的显著性t检验：

* $P < 0.05$, ** $P < 0.01$, *** $P < 0.001$

表1中实验班和对比班在五次测验成绩上的差别，从实验先后结果看，有剪刀差现象。这表明实验教学对实验班学生提高学习成绩方面是有积极影响的。特别是第5次延缓测验的成绩比较，说明实验班学生在知识的巩固和保存的效果上要比对比班为好。

完成表内乘除教学任务所需的时间，实验班为56课时，对比班为98课时。实验教学不仅提高了学习质量，同时节省了教学时间。

二、对部分与整体关系的理解与正确掌握乘除概念的关系。

在实验教学过程中，为了考察学生是否正确掌握了乘除概念，进行了两种测验。其一，概念适用性广度的测验。概念适用性广度是指儿童学习乘法意义之后，能在乘法概念的外延所及范围内，应用乘法意义解答新课题的能力。这种能力可看作为一种迁移能力。例如在学了2—4口诀之后，要求写 2×7 ， 8×3 的相应的加法式。又如在学了表内乘法之后，要求解答乘数是二位数的乘法题，“34个2是多少”。实验班对这两个测验题的答对人数的百分比分别为100和92，而对比班I为95.1和62.8，对比班II为78.9和60.7。其差别的原因是，实验班学生对乘法意义和被乘数与乘数的意义，能从总数包含有多少份每份数这一关系去理解。他们防止了对比班学生常把乘数与被乘数相混的一类错误。而且他们能将理解了的关系应用到乘法概念范围内较复杂的新课题的分析活动中去。这一结果又说明了，儿童对部分与整体关系的理解有利于概括、推理能力的提高。

其二，概念内涵深度的测验，共七个测验题。实验班的成绩都比对比班为好。其中三个题目的成绩差异较为突出，比较如下：

题目	把被除数分解 为除数和商	任写一个乘法式，并 把它改写为相应的加法式 和二除法式	任写一个加法式，并 把它改写为相应的乘 法式
实验班答对人数的 百分比	82.6	92.4	100
对比班 I	62.8	86.6	75.6
对比班 II	33.3	84.4	60.4
对比班 III	65.7	86.4	80.0
对比班 IV	35.4	63.0	39.6

实验班学生从一般关系去理解具体关系，即对被乘数、乘数、积和被除数、除数、商的意义，从总数、每份数、份数的相互关系去理解，从乘法和加法，除法和乘法的可逆关系去加深理解，能较好地掌握乘除概念。例如，要求被试把被除数分解为除数和商这一题，实验班学生能从每份数和份数之间的补偿关系，有规则地来把握一个总数分解为相同部分数的种种情形。

三、对部分与整体关系的理解与思维灵活性的关系。

表 2 实验班与对比班解答变式题成绩的比较

百分比 班级	测验	应用题			文字式题		
		做对不变式题 的人数	全部做对变 式题的人数	全部做错变式 题的人数	做对不变式题 的人数	全部做对变式 题的人数	全部做错变式 题的人数
实验班		100	65.4	0	96.2	65.2	0
对比班 I		100	9.3	0	97.1	55.8	4.7
对比班 II		95.8	19.2	4.0	100	62.5	4.2
对比班 III		—	17.1	0	—	45.7	14.3
对比班 IV		—	25.0	2.1	—	22.9	18.7

从结果中看到，虽然实验班与对比班在变式题（变式题的测验题，详见附录）方面的成绩都比不变式题的成绩有所下降，但下降的幅度，相差是悬殊的。对比班 I 下降的幅度约为实验班的 4 至 5 倍，对比班 II 下降的幅度约为实验班的 3 至 7 倍。对比班 III 和对比班 IV 的成绩也比实验班低得多。从表 2 中全部做对变式题的人数或全部做错变式题的人数的百分比看，实验班优于 4 个对比班更为明显。

应用题内的不同变式方式之间，下降的幅度也不相同。结果表明，多余数字和每份数的叙述变换，这两种变式方式对学生解题思路有较大的影响。例如，其中第 4 题的变式方式是“多余数字”。对比班学生中，有的学生的错误表现为，“ $14 - 8 = 6$ ”、“ $14 + 8 = 22$ ”，

他们不能排除“14”的干扰，结果影响了对题目数量关系的分析。而实验班大部分学生，从问题入手，知道题目求的是书包的总数，应该有每份数和份数两个条件。“一人背1个”，是每份数为1，“8和14”，题目说的是8个人背书包，8是份数，把“14”这一多余数字从数量关系中排除出去。答对这个题的人数，实验班占81.6%，比对比班I（23.6%）和对比班II（41.7%）高出1至3倍半。

这一结果表明，实验班学生在变式题面前，他们用总数、每份数和份数的相互关系原理，在分析题目中的数字时，抓住数量之间的本质联系，排除非本质因素的干扰，表现出思维的灵活性。而对比班中不少学生，没有象实验班学生那样，通过理解乘除系统中部分与整体关系而构建解题的基本模式。所以，对比班中的这些学生，当然也不能象实验班学生那样，在题目的变式面前，应用解题的基本模式分清本质与非本质的东西。因此，他们在解题时被外部因素所扰乱，难以判断和确定有用数字之间的关系，于是乱用数字，乱凑算式，陷入盲目性。

讨 论

在“关于儿童对部分与整体关系认知发展的研究—6至7岁儿童用非除法运算解答包含除法的实验”⁽¹⁾一文中，我们曾假设：

“如果学生在学习乘除之前，掌握总数、每份数和份数之间的相互关系，那末，在学习乘除时，对于理解乘法和加法的关系、除法和减法的关系、除法和乘法的关系、等分除和包含除的关系，可能会容易些，有利于加速掌握乘除概念。”这一假设在本实验以及在另一个实验教学^①中得到了证明。就是说，对数的部分与整体关系的理解，能够促进儿童掌握乘除知识和发展智力。获得这一结果的原因，是值得加以讨论的。

先从知识结构方面看。构成一门学科，或某一领域，或某一方面知识的诸概念之间的逻辑关系，是一个结构系统。布鲁纳指出，对一门学科的结构，要给以“根本原理”，去达到“最基本的理解”⁽²⁾。这是因为“懂得基本原理”，使学生对学科的特殊规律和一般规律之间的联系更易理解，使学生对新问题的适用性越宽广、迁移越广泛，使学生对获得的知识有助于记忆。赞科夫指出，“只有抽象思维才能更深刻、更接近地认识事物的实质”，“同时，从抽象上升到具体，才是更完整地认识那个具体事物，认识它与其它事物之间的有机联系。”“要重视理论思维的主导作用”。⁽³⁾看来，强调知识的结构性，不只是为了知识材料在编排上的顺序，而是需要“一开始就学习普遍的观念”。⁽⁴⁾

按照上述对知识结构的看法，本文研究的侧重点是，对乘除的数量关系，要从更一般的客观数量关系去加以说明。从部分与整体关系出发看，乘除数量关系的基本结构，是总数包含多少份每份数。总数、每份数和份数之间的变化关系，是一般关系的反映，这三个数在等式中的位置变换，分别表现为乘法、等分除、包含除等三种特殊关系。

在实验教学中，我们让学生先掌握一般关系，随后去掌握特殊关系。就是说，学生先学习总数、每份数和份数的三数关系，然后以对这个关系的理解为基础，去掌握乘除的数理知

^①继本实验之后，于1981年在辽宁省黑山北关小学正式开设实验班，重复实验的结果，又一次获得良好的教学效果。

识和运算法则。这样做的好处在于，学生在基本的和普遍的观念的基础上形成的新的认知结构，有利于对新知识的接受和掌握。

从认知结构方面看。在实验教学中，从实验教材第一部分内容到第二部分内容的学习过程，是一个从未知到知，从已知到新知的过程，是一个在原有认识基础上建构新的认知模式化结构的过程。实验结果指出，实验班学生的新认知模式对比班学生的新认知模式，具有较大的迁移能力。我们知道，迁移的基础在于概括。由于实验教材对乘除知识内容加以高度的概括，对寓于个别中的共同特征，深刻地揭示出来，提供了迁移的客观条件，另一方面，当学生通过学习总数、每份数、份数的相互关系，掌握了乘除的数量关系的普遍原理和逻辑关系之后，建构起来的新的认知模式，将迁移的客观条件转化为内部动力。这种“原则迁移”的作用，促进儿童闻一知十，举一反三的推理能力的发展，并使知识系统化、融会贯通。使学生避免知其然，不知其所以然，学到后面，忘了前面的一类弊病。

下面是学习实验教材的第一部分内容向第二部分内容过渡中，解题水平的转化。

题 目	图 示	推 算 过 程	解 题 的①②③级水平
每人有 4 本书， 3 个人共有多少 书？	$\boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{4} \rightarrow ?$	每份是 4，求 3 份一共有多少， 就是 3 个 4 是多 少。	① $4 + 4 + 4 = 12$ ③ $4 \times 3 = 12$
有 12 本书，每人 4 本可分给几个人？	$\boxed{4} + \dots ? \dots + \boxed{4} \leftarrow 12$	总数是 12，每份 是 4，求份数， 就是 12 里面有几 个 4，或者说， 几个 4 合起来是 12。	① $12 - 4 - 4 - 4 = 0$ ② $4 \times (\quad) = 12$ ③ $12 \div 4 = 3$
有 12 本书，平分给 3 人，每人得几 本？	$\boxed{?} + \boxed{?} + \boxed{?} \leftarrow 12$	总数是 12，份数 是 3，求每份 数，就是 12 平均 分成 3 份，每份 是多少，或者 说，3 个什么相 同加数合起来 是 12。	① $12 - 3 - 3 - 3 = 0$ ② $(\quad) \times 3 = 12$ ③ $12 \div 3 = 4$

实验班学生在学习自编教材第一部分内容时（即学习乘除之前），用连加连减运算方法对乘除题目的解答过程是，用总数、每份数和份数的三数关系分析题目中的数量关系，然后用加减法进行演算而获得答案。如包含除题目。12 里面有几个 4 呢？从 12 里减去一个 4，还剩 8，再减去一个 4，还剩 4，再减去一个 4，12 减去 3 个 4 等于 0，所以 12 本书，每人 4

本，可分给3个人。又如等分除。把12平分成3份，每份是多少呢？先试看从12里减去3个1，即从12里一次减去3，还有剩余，第二次减去3，实际上是减去3个2了，还有剩余，第三次再减去3，直至12被减完。用3减了4次，实际上是减去3个4，就是12平分成3份，每份是4。所以，12本书分给3人，每人得4本。这种借助于连加同数或连减同数方法解答乘除题目的推算能力，我们曾对186名6至7岁儿童作过调查。本研究则是训练学生理解总数、每份数和份数的逻辑关系的基础上，形成和发展这一推算能力。我们认为，自编教材的第一部分内容，要求在学习乘除之前掌握基本的和普遍的观念，是基于不怀疑小学一年级第二学期学生对抽象概念的接受能力。这一点看法，赞科夫已指出过⁽⁶⁾。当学习第二部分内容时，即学习表内乘除时，他们在第一部分内容学习中业已建立起来的新的认知结构的基础上，思想上把乘除的具体关系纳入到总数、每份数、份数这个一般关系系统中去。于是比较顺利地把加法运算转化为乘法运算、把减法运算转化为除法运算，促进了解题水平从第一水平向第二、第三水平转化，并且，比较明确地理解加法与乘法、减法与除法、乘法与除法、等分除与包含除之间的数理关系。正如我们在《儿童在数及数学上对部分与整体关系认识的发展》⁽⁶⁾一文中所指出，“儿童对部分与整体关系的认识标志着思维发展的水平，也是掌握数学概念的手段和途径”。

本研究的实验设想和结果，用恩格斯的话，可以得到进一步的解释。恩格斯指出：“辩证法对今天的自然科学来说是最重要的思维形式，因为只有它才能为自然界中所发生的发展过程，为自然界中的普遍联系，为从一个研究领域到另一个研究领域的过渡提供类比，从而提供说明方法。”⁽⁷⁾部分与整体关系是辩证思维的规律之一。在乘除中，部分与整体的关系体现为总数、每份数、份数的相互关系。它是在一般关系上对乘除系统内数量关系的揭示，成为对乘法的理解，从对等分除的理解，到对包含除的理解，即成为理解这一特殊形式到另一特殊形式的数量关系的思维中介。儿童对部分与整体关系的理解的发展，是儿童初步建立辩证思维的一个重要方面。

应当指出，认知结构与知识结构，是有联系又有区别，既不能把它们等同起来，又不能轻视它们的相互转化。但对学生的学习来说，根本在于要有一个良好的知识结构。因为良好的知识结构是获得优等认知结构的物质前提。教学解决转化过程的问题。总之，我们认为，揭示认识对象的内在规律有利于主体的认识活动。

小 结

本研究用部分与整体关系的观点，试编了一部分小学数学教材，强调知识结构的重要性，注重发展学生的智力。实验教学的效果是比较好的。研究结果认为，儿童对部分与整体关系的理解有助于掌握知识和发展智力。对小学数学教学改革有参考意义。

附录：应用题的变式题和文字题的变式题

1、学校做了许多面红旗，准备发给每班5面。9个班领取红旗后，问学校的红旗数减少多少面？（变式方式：个别词）

2、五年级二班全班有多少人，他们平均分成6组，每组有5人？（变式方式：问句在题首）

3、如果每人分7支铅笔，要多少支铅笔够分9个人？（变式方式：问句在题中）

4、14个小朋友中8个人背书包。他们1个人背1个书包。问小朋友共有多少个书包？
（变式方式：多余数字）

5、如果买4斤大白菜要搭配一斤小萝卜。张大妈买3斤小萝卜。同时可以买多少斤大白菜？（变式方式：每份数的叙述）

6、56是哪8个相同加数连加的和？
（原题是：把56平均分成8份，每份多少？）

7、一个数被连续减去7个4，结果得0。这个数是什么数？
（原题是：7个4是多少？）

8、27减去几个3。结果得0？
（原题是：27里面有几个3？）

参 考 文 献

①何纪全：心理学报，第1期，41页，1982。

②杰罗姆·S·布鲁纳：《教育过程》，上海师范大学外国教育研究室译，上海人民出版社出版，1973年

③列、符、赞科夫：《和教师的谈话》284页296页，杜殿坤译 教育出版社

④同②

⑤同③

⑥刘静和等：心理学报 第2期1页，1982。

⑦恩格斯：《自然辩证法》，28页，人民出版社，1971。

中国心理学史编写大纲讨论会在庐山举行

发掘与整理祖国心理学思想遗产，是建立具有中国特色的心理学的重要途径之一。根据教育部（83）高一司字046号文件的规定由江西师院教育系筹办中国心理学历编写大纲讨论会。会议得到江西省政府有关领导同志的关怀和支持，于8月4日至10日在庐山举行。出席会议的有中国心理学会理事长潘菽教授，南京师院高觉敷教授（主编），北京师大彭飞教授，西南师院刘兆吉教授等共20多人。

会议讨论了中国心理学史分期问题，古代部分基本上是哲学家的心理学思想，第一编先秦时期；第二编秦汉至唐；第三编宋明清；第四编为近现代部分。这一编的要点是：一、从鸦片战争到五四运动着重阐述对西方心理学的吸收，二、从五四运动至解放前夕着重介绍西方心理学流派的传播与本国学者在各种研究上的成就，三、解放后阶段则总结三十多年来历史经验与教训。这部教材的编写也是一项重大的学术研究，已开始引起国内外心理学界的注意。

会议讨论了中国古代心理学思想与哲学思想的区别与联系问题，强调避免把本教材写成中国哲学史简编。会议认为中国古代医学心理学思想，军事心理学思想，文艺心理学思想等也极丰富，可以在系统研究基础上另写专著，在本教材中可从简。（马文驹）

*The Development of Children's Cognition
of the Part-Whole Relationship
Concerning Number and Arithmetic
—Promotion of children's concept
of multiplication and division
He Jiquan, Han Lu*

(Institute of Psychology,
Academia Sinica)

This study is part of the research into the child's mathematical concept on the basis of part-whole relationship by reorganizing the relevant part of the primary school arithmetic textbook and using the revised text as a means to explore the relation between the knowledge structure and the cognitive structure.

The result indicates that the revised material will facilitate their mastery of multiplication and division, and the development of their ability to solve multiplication or division problems.

*An Experimental Study of the Formation
of Motor Skill of Middle School Students
Shen Deli, Liu Jingquan & Lin Jingqiu*

(Tian Jing Normal University)

The process of the formation of motor skill of middle school students will include the three phases: from action conception to action representation, and then to concrete operation. Their practice curves are mainly identical in comparison with those of adults, but there are re-

markable individual differences between themselves. These individual differences have no marked connection with academic achievements, but are obviously related to students' attention, insistence, interest and attitude. In other words, non-skill factors characteristic of personality play an important role in the process of the formation of motor skill. The transfer of such skill manifests itself not only in the influence of former experiences on new skill, but also in the mutual influence between the left and right hands.

*Four Trends in the History of
Abnormal Psychology
Chen Chongkeng*

(Department of Psychology,
Beijing University)

The present article is concerned with the four trends: Pinel's moral treatment was, by the permission of the Paris Commune, to release and unchain the insane at the hospital; Kraepelin's experimental psychological approach led to a scientific study of behavior disorder; Freud's deep psychology hypothesized the psychic energy as the motivational source of mental life; Albee et al's manpower and community prevention showed the need of changing the custodial mental hospitals. The author also deals with some theoretical and clinical problems involved in these trends.