心 理 学 报
第1期　ACTA PSYCHOLOGICA SINICA　1983 年

解决几何问题的思惟过程1)*、**

朱 新 明
中国科学院心理研究所

摘　　要

本研究探讨了初中学生解几何题的思惟过程。所用的方法是要求被试证题时出声想，收集他们证题时的口语材料，并对这些材料作了初步的分析。

结果表明：

一、几何问题解决过程往往包含有假设验证的过程。其中，被试如果能从问题的情境中正确地辨认出某种模式，就能唤起与解题有关的知识。

二、两组被试在解题的时间和过程方面有一些差异。甲组被试（解题经验较多）解题的平均时间是乙组被试的三分之一。甲组被试能很快地把他原来熟悉的模式辨认出来。乙组被试（相当于初学者）多半要作一些无效的尝试才有可能正确地认出模式。甲组被试比乙组被试善于交替运用逆推和顺推的搜索策略以及其他有效的策略和办法。

一、问　　题

问题解决是心理学研究中的一个重要的问题。行为主义学派和格式塔学派对动物和人的问题解决都进行过探讨，五十年代以来，A.Newell 和 H. A. Simon 等人从信息加工的观点对这个问题作了富有成果的研究，并在1972年写有专著叫«人的问题解决»[1]。

问题解决是人工智能的重要组成部分。心理学的途径已经"成为人工智能研究的主要途径之一——启发式途径，并取得了可观的成绩"[2]。

问题解决的研究在教学和训练方面也很有意义。H. A. Simon 根据他们所得的结果，指出现行数学、物理等教材和教法中存在的问题，强调要改进现行的教学和教材结构[3,4,8]。

在人工智能中，专业问题的解决已经发展成为专家系统的研究。我国60年代卢仲衡、朱新明等对学生证几何题的问题进行过探讨，得出一些初步结果[5,6]。

近年来，关于几何问题解决 J. G. Greeno 进行过很有意义的研究并成功地进行了计算机模拟[7]。H. A. Simon 等人对问题解决作过深入的研究，他认为：专家之所以能很快

1）本文于1982年7月14日收到。
* 本研究得到潘菽和李家治老师的指导。
本研究得到北京丰台五中和小屯中学的支持，特此感谢。
** 文章中所涉及的原始材料只是举例性质，由于篇幅所限，其他材料不能一一列上。

地解决问题是“因为他能很快在记忆中把原来熟悉的组块认出来”。“先要认出某种东西，由认出某种东西导致想起有关的知识”[8]。此外，Jill Larkin等人认为专家解决问题是要依靠丰富的知识，但这些知识必须有大量的模式作为索引[3]。

模式辨认在学生解几何题中是怎样表现的？特别是当几何图形比较复杂，正确认出模式受到很多干扰时会怎么样？另外，解题经验较多和较少的学生之间在模式的辨认方面有些什么差别？本研究就收集到的材料，对这些问题作一些初步的分析。

二、方 法

收集材料的方法是要求被试解题时出声想，用录音机录下被试的口语材料。

被试划分为两组：甲组被试 6 人多数都学完了初中平面几何课程，平日做过较大量的几何题，有的还经过系统的复习练习，因此有较丰富的解题经验。乙组 8 人是正在学习平面几何四边形和圆这两部份知识的学生，这组被试一般都掌握了初步知识，但平时做的习题量不大，解题经验较少。

所用的几何题见附录。这些题的图形，有的稍为复杂一些，如何去解不是一眼就能看得出来的，如第一题和第二题。这是因为考虑到三角形和四边形的知识，对于乙组被试来说也经过了阶段复习和练习。另外有些题还要求被试作辅助线。

三、结 果

1. 口语材料表明，每当被试从问题的情境中认出了某种他原先熟悉的东西，而这认出的东西又符合解题目标的要求，就唤起了与解题有关的知识并沿着这个思路解决问题。下面就是表明这个问题的一些口语材料。

表 1 被试 A 解第三题的口语记录（节录）

内 容		注
1	审题 ……	* 被试从问题的情境中认出了 $DGBC$ 是平行四边形，由此唤起了被试用平行四边形对边相等的知识去解题。
7	作辅助线平行 EF（作 DG 平行 EF）	
8	DC 平行 GB	
9	这个是梯形（即 $ABCD$ 梯形）	
10	“若能证 DG 等于 BC 就能证……”	
11	平行四边形	
12	EF平行BC，啊！对了。* 作这个平行这个（指 DG 平行 EF）EF 还平行 BC，所以 DG 平行 BC， …… （以下正确解题）	

表 2　被试H解第三题的口语记录（节录）

内　　　容	注
…… …… 10　噢！对了。 EF平行DG，E是中点。 EF是三角形ADG的中点，这样可以求出EF等于二分之一DG。	被试从问题的情境中认出了某种她所熟悉的东西，即EF是三角形ADG的中位线，从而唤起了用三角形中位线知识去解题。

表 3　被试A证第四题的口语记录（节录）

内　　　容	注
…… 3　PBA角等于角DCA 4　…… 5　…… 6　啊！角EPC是弦切角，等于它所夹的弧所对的圆周角*……。（以下正确解题）	* 被试认出了弦切角EPC，唤起弦切角等于角内弧所对的圆周角的知识解题。

2. 口语材料还表明甲乙两组被试在解题速度、解题过程，以及解题过程中所使用的一些策略方面都有一些差别。

（1） 甲组被试解题所用的平均时间相当于乙组被试时间的三分之一。

（2） 甲组被试解题途径往往直接了当，思惟的指向性明确，不走或少走弯路；而乙组被试则盲目性较大，无效尝试较多或走迂回曲折的证题途径。

两组被试所解一、二、三题基本上都正确，但甲组被试拿到题后，很快就把问题归入某一类型。其中第一题和第二题的证明并不很难，但图形较为复杂，而他们仍能快速地识别出符合解题目标要求的几何图形模式。而乙组被试却往往被情境中某些因素所束缚和干扰。所以尝试错误的次数多一些，速度也就慢一些。

第四、五题相对来说要难一些。如第四题，乙组被试不少人做错了或不会做。

下面就是两组被试证题过程的一些对比材料：

表 4　被试L（甲组）证第二题的口语记录

时　间	内　　　容	注
0—13″	审题	被试L从第13秒起，就提出了正确的假设，不到一分钟就完成了这道题的证明。没有多余的运演活动，没有无效的尝试。
13″	先考虑梯形中位线定理。AA'加CC'等于2倍的OO'，因为$AA'CC'$是梯形，AO等于OC。	
31″	二倍的OO'等于AA'加CC'。	
35″	又因为BB'平行DD'，而DO等于BO，DO'等于$B'O'$。	
53″	所以两倍的OO'等于DD'加BB'。（完）	

被试L表现出从复杂图形中快速而又准确地识别出符合解题要求的图形模式，即两个侧躺着的梯形及其中位线，不因这两个梯形不是标准的，也不因图形内部有其他要素改变了图形的面貌而发生识别上的困难，表现出能撇开情境中的某些因素的干扰。

表 5　被试H（乙组）证第二题的口语记录

时　间	内　容	注
0	审题……。	* 主试给予启发
1′20″	AC 和 BD 是对角线，平行四边形对角相等。	** 以上走了漫长的“途程”，仍没有找到正确的证题途径。
	（主试问：对角线怎样？）*	
1′51″	平行四边形对角线互相平分。过交点MN垂直，AA'垂直MN……	
2′57″	AA'平行CC'……AA'比OO'等于……。	*** 刚开始有了一点正确的思路，又走上了歧路。表明被试受到情境中某些因素的干扰。
	不会做了。**	
4′12″	垂线都是直角，连接AC和BD，OD等于OB……。	
5′50″	用梯形的中位线来证，因为AA'平行CC'，……是梯形……中位线。	
6′38″	OO'是AA'加BB'的二分之一。***	
7′19″	哦！错了。	**** 发现了错误，转向正确途径。
7′40″	$OO'=\frac{1}{2}(DD'+BB')$……（以下正确作题）****	

表 6　被试M（甲组）证第四题的口语记录

时　间	内　容	注
0—13″	审题	一开始就认出了弦切角和同弧上的一对圆周角。在13秒后就径直解决问题。
13″	弦切角EPC等于角PBA。	
31″	又因为角PCD和角DBA对的是等弧，	
	所以这两个角相等。	
48″	所以角EPC等于角PCD，	
53″	所以CD平行PE。	
	（完）	

表 7　被试B（乙组）证第四题的口语记录（节录）

时　间	内　容	注
0—18″	审题……	* 不能从问题的情境中认出同弧上的圆周角，因此明摆着的条件不加以利用，却以证三角形全等找条件。
18″	AB对圆周角，取得两个三角形。	
49″	三角形PBA和三角形PDC，证这个三角形可以通过什么？……	
	这角……这角……。*	
1′11″	AB是这两个的同弦，	
1′29″	AB对的圆周角BPA……	** 没有从问题情境中认出弦切角，因此再次作无效尝试。
4′12″	（在想——不出声）	
4′21″	主要是角CPE要和角C相等，	
4′25″	证不出来。	
	……，	
4′29″	连结EC，证三角形和它相等，**……。	
	不对。	
	……	

（3）　口语材料表明有些被试往往以一定的策略、解题计划等组织解题。

甲组被试，一般能紧紧地抓住问题，能交替运用逆推和顺推的搜索方法。在对待较为容易或比较熟悉的问题时，一般是采取顺推的搜索策略，在遇到较为困难或不太熟悉的类型题时，注意运用逆推分析法组织解题。

现在看被试A证第五题的口语记录。

表 8　被试A证第五题的口语记录（节录）

内　　容	注
1　审题 已知CD是角ACB的平分线 DE平行AC DF平行BC 求证CD垂直EF*	*　目标
2　要证这个垂直（指CD垂直EF）就得证四边形$CEDF$是个菱形**，因为菱形对角线相互垂直。	**　次级目标
3　现在知道对边分别平行，所以可证$CEDF$是平行四边形现在只要再证有一组邻边相等就行了。*** ……	***　更次级目标

这个被试先是定下了为证垂直"就得证四边形$CEDF$是个菱形"（参看表8，2），接着又看出"$CEDF$是平行四边形"，而为了证$CEDF$是菱形，"只要再证有一组邻边相等就行了"（参看表8，3）。后面，他为证邻边相等而证两三角形全等。他证题时的目标分解过程可以表解如下：

总目标：证垂直
│
证为菱形
│
证有一组邻边相等
│
证两三角形全等
│
⋮

他运用逆推分析法（working backward），把总目标（goal），证垂直转化为一系列的次级目标（subgoal），通过方法和目的的分析（menas-ends analysis），把当前状态和目标状态进行比较，找出差别，运用算子（即几何定理等）消除这些差别，一个个地解决这些次级目标，最后导致总目标的解决。

此外，甲组被试解题时所使用的策略还表现在如下的一些谈话中：

被试M证完第四题后，他说："要证CD平行PE，就要证角EPC等于角PCD，这两个角，我当时估计不会直接相等……"。

被试N证完第四题后也有类似的话，她说："证平行，就要证内错角相等，内错角EPC和PCD，如直接证不出相等，可以借助第三角，它俩都等于（某）一个角，它俩就相等了。"

被试L证完第六题后，说："AB是直径，想到能不能先求半径。圆和MN相切，一般相切时，可以连结切点，（过圆心）连切点就垂直切线，正好AM和BM垂直于MN，正好利用上梯形（中位线定理）。"

从口语材料看：乙组被试解题时，缺少一些策略和办法。一些乙组被试对有些题也会运用逆推的搜索方法。但看来不是很熟练。另外有些乙组被试惯用盲目地尝试错误方法，证题缺乏计划，想到那里证到哪里。个别乙组被试解题时不根据课题特点，而是沿用

习惯化的方式解题。

四、讨 论

1. 对问题的识别、归类与假设验证过程

一些被试解题时先有对问题的识别和归类。如被试 A(见表 9, 3)说:"现在有思路了,证这个三角形(指三角形 ACE) 与那个三角形(指三角形 ABD)相等、全等。"这表明被试已把这个问题归之为证三角形全等的问题,他已识别出这是求证两个三角形全等的问题。

被试对问题的识别和归类往往包含有假设和验证的过程。例如被试 A 提出的假设是可以通过证两个三角形全等来证 BD 和 CE 相等,接着就对所提假设进行验证(表 4, 5—9)。

被试所提出来的假设,经过验证,如果得到证实,就解决了问题,否则就重新提出假设,继续进行验证。如被试 E 在证第一题时,他也是把这个问题归之为证两个三角形全等从而证对应边相等的问题,他开始提出来的假设是要证三角形 ACE 和三角形 BCD 全等,但经过验证,知道没有条件证这两个三角形全等,于是又重新提出证三角形 ACE 和三角形 ABD 全等。同样,另有两个被试开始提出的假设也是要证三角形 ACE 和三角形 BCD 全等,经过验证,找不到条件,才又提出新的假设,从而解决了问题。

表 9 被试 A 证第一题的口语记录

1		(念题目)
2		这些角都是相等的,(指$\angle ABE$、$\angle AEB$、$\angle EAB$……)等边三角形每个角都是60度。
3		……现在有思路了,证这个三角形与那个三角形相等、全等。
4	主试:	是哪两个三角形?
	被试:	证三角形 ACE 与三角形 ABD 全等。
5		全等有什么条件呢?这个角等于这个角(指$\angle EAB=\angle DAC$),……所以这个角等于这个角(指$\angle EAC=\angle DAB$),证出一个角了。
6		证出一个角了,再找边看,找出一对边,这条边等于那条边(指 AD 等于 AC)。
7	主试:	什么边?
	被试:	等边三角形三边相等……AD 等于 AC,
8		AE 等于 AB。
9		所以在三角形 ABD 与三角形 EAC 中,已知两边相等,两边所夹的角也相等,所以这两个三角形相似。
10	主试:	是相似还是相等?被试:相等、全等。

2. 模式辨认

人们解决问题需要知识,对问题识别、提出假设、验证假设都要有与问题有关的知识。前面(结果 1)说了:每当被试从问题的情境中认出了某种熟悉的而又符合解题目标的东西,就唤起了与问题有关的知识,也就是说,被试事先从问题情境中认出某种熟悉的东西,才唤起与解题有关的知识。所谓某种熟悉的东西是什么呢?现以第四题为例,从小圆看,角 B 和角 C 是同弧所对的圆周角,这是被试平日学习几何时见过了多少遍的,现在被试从

这道题的情境中认出了它们，这也就是他认出了他原来熟悉的东西，由认出了这两个角，唤起了相应的知识——同弧上所对的圆周角相等。同样，从大圆看，PE 是切线，EPA 角是弦切角，这弦切角也是被试平日多次见过的，是他所熟悉的东西，认出了弦切角就唤起了弦切角等于角内弧所对的圆周角的知识。这样看来，所谓“熟悉的东西”就是一些几何图形模式，而所唤起的知识就是表达几何图形性质的几何定理、几何公理等。解几何题就得由认出某种几何图形模式，唤起相应的几何定理、公理等知识。这也就是说人们从长时记忆中提取某种几何知识需要从当前问题的情境中认出某种几何图形模式，即所谓知识需要模式作为索引[3,8]。

这里提出一个问题，即模式辨认本身又取决于什么呢？模式的辨认也离不开知识，即应当有如何去辨认模式的知识，并且需经一定时期的训练，才能培养起快速正确地辨认模式的能力。

3．两组被试在解几何题的速度和过程方面的差异

在讨论 2 中已经说了：解决问题需要知识，而知识又需要模式作为索引。因此两组被试解题中的差异首先应当从模式辨认这方面来找，至少模式辨认是个重要的条件。

从口语材料中可以看到：甲组被试一般都能较快较正确地把原来熟悉的而又符合解题要求的模式（或组块）辨认出来。

我们再引一些甲组被试解题后所说的话来说明这个问题。如一个被试证完第一题后说：“我一看这两个三角形，看起来就相等，就找条件证全等（试一试）”。再如被试M证完第二题后说：“我一看，就看出这两个是梯形，梯形 $AA'C'C$ 和 $DD'B'B$。”又如一个被试在证完第五题后说：“一看这里象菱形，证出菱形，对角线就相互垂直。”

由于甲组被试能快速正确地辨认模式，因而很快地唤起了与解题有关的知识，从而为快速正确解题创造了条件。而乙组被试由于模式辨认方面比甲组被试差、尝试错误多一些，表现出一种“乱碰”的现象。

4．从复杂的几何图形中辨认模式的问题

模式辨认的难易与教学、被试平日的训练，以及与图形的复杂程度有关。苏联的研究和我们过去的研究都表明了这一点。符·伊·考科娃认为：如果图形的形状和位置不是标准的，如果图形内部还夹杂有图上的其它要素，因而改变了图形的面貌，那时，由复杂的图里辨别出所熟悉的图形就要发生困难。我们过去的研究也表明由于图形交错、线段间隔等使得图形复杂化。学生难以从中分出符合解题要求的图形[5,6]。

要正确地辨认模式，特别是从复杂的图形中辨认模式，需要根据问题的要求，主动地对信息加工处理，而不能被动地感知信息。如证第二题，要正确地分出两个梯形 $AA'C'C$ 和 $BB'D'D$ 就得把其他无关的几何要素撇开，不受他们的干扰，而把有关的几何要素组织在一起。

要正确地辨认模式还需要从不同的角度，从不同的关联中去考察一些几何要素。如证第二题，分出的那两个梯形是侧躺着的，要求被试能从这样的角度把它们辨认出来。从不同的关联考察几何要素，可以以第四题为例说明，这道题所涉及的一些角要与切线、弦、大圆、小圆等关联起来。这样，EPA 角就是弦切角，角 C 就是 AD 弧所对的圆周角，角 B可以从大圆看，也可以从小圆看，从大圆看，它是弦切角 EPA 所夹的 PA 弧所对的

圆周角，从小圆看，它是AD弧所对的圆周角，它与角C对的是同一条弧，即AD弧。

5. 关于逆推分析法

关于逆推分析法，近年来 H. A. Simon，等人认为是初学者问题解决时所采用的策略，而我们的结果是乙组被试（相当于初学者）中虽然有些人会运用这种搜索策略，但不够熟练，这可能与学校的训练有关，也可能在这一阶段的几何学习中，还没有熟练地培养起这方面的技能。

6. 对教学的意义

前面已经提过，解决问题要靠知识，知识又以大量的模式作为索引。专家或有经验的人能较快地从问题情境中，把他原来熟悉的模式（或组块）认出来，从而导致唤起有关的知识解题，本研究也从几何问题解决方面证实了这一观点。这一观点看来对教学是有意义的。教材的编写和教学方法上，应当注意训练学生模式辨认的能力。

前面也说过有经验的人善于交替运用顺推和逆推的搜索策略，运用方法和目的分析，运用解题计划和其他一些具体的经验和办法，组织解题，有经验的人不是被动地感知信息，而是主动地、以一定策略对信息进行加工处理、组合有关的因素，排除某些因素的干扰。因此，为了提高学生解题能力就要注意给学生这方面的训练，教给学生有效的策略和办法。J. G. Greeno，认为问题解决必须具备模式辨认、命题和策略方面的知识。强调要教给学生解题策略方面的知识[7]。看来，我们的结果与 J. G. Greeno的看法是一致的。

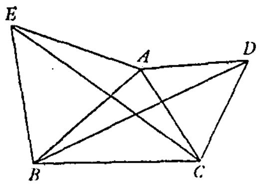
五、小　结

1. 被试解几何题先有对问题的识别和归类。在对问题的识别和归类时往往包含有假设和验证的过程。

2. 被试如果能从问题的情境中正确地辨认出符合解题目标的几何图形模式，就能唤起与解题有关的几何知识。

3. 两组被试解几何题的时间、过程和策略方面有一些差异。甲组被试解题的平均时间是乙组被试的三分之一。甲组被试能很快地把他们原来熟悉的模式辨认出来，乙组被试多半要作一些无效的尝试才有可能正确地辨认出模式。甲组被试比乙组被试善于交替运用逆推和顺推的搜索策略和其他有效的搜索策略和办法。

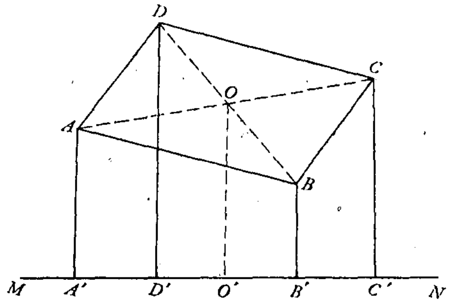
附　录



（1） 已知：如图以 ΔABC 的两边 AB 和 AC 向外作等边三角形 ΔABE 和 ΔADC，连接 BD 和 CE。

求证：$BD=CE$。

图 1 第一题

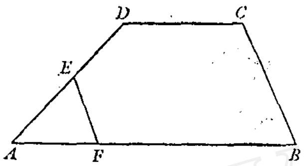


（2） 已知：如图从平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A、B、C、D 分别向 MN 引垂线，垂足为 A'、B'、C'、D'。

求证：$AA'+CC'=BB'+DD'$

（辅助线：连接 AC 和 BD，从交点 O 引 MN 的垂线，垂足为 O'）

图 2　第二题

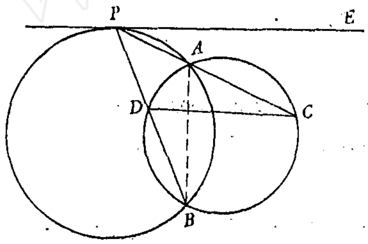


（3） 已知：如图 E 是梯形 $ABCD$ 中 AD 边的中点

$EF \parallel BC$　$EF=2.8$ cm

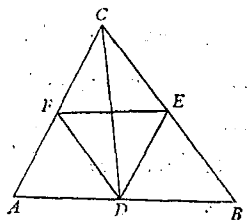
求：BC 的长

图 3　第三题



（4） 两圆相交于 A 和 B，从一个圆上任意一点 P，作直线 PA 和 PB 交另一个圆于 C 和 D，求证 CD 平行过 P 点的切线 PE。

图 4　第四题

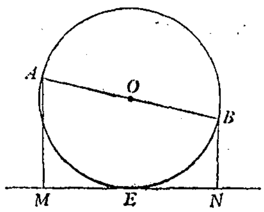


（5） 已知：如图 CD 平分 $\angle ACB$，

$DF \parallel BC$，$DE \parallel AC$

求证：$CD \perp EF$

图 5　第五题



（6） 已知：MN 和圆 O 相切于 E，AB 为直径，

$AM \perp MN$，　$BN \perp MN$，

$AM=1.6$ cm，　$BN=0.6$ cm

求证：AB 的长

图 6　第六题

参 考 文 献

〔1〕 Newell, A., Simon, H. A. Human problem solving, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1972.
〔2〕 李家治，心理学参考资料，第5期，1977年。
〔3〕 Larkin, J., McDermott, J., Simon, D. P., Simon, H. A., Science, 208, 20, 1335—1342, 1980.
〔4〕 Simon, H. A., In Tuma, D. T. and Reif, F. (Eds.), Issues in teaching and research, Hillsdale, N. J.: Lawrence Erebaum Associates, 81—96, 1980.
〔5〕 卢仲衡等，心理学报，第1期，72—83页，1964年。
〔6〕 卢仲衡，朱新明，心理学报，第3期，248—257页，1964年。
〔7〕 Greeno, J. G., In Glaser, R. (Ed), Advance in Instructional Psychology, 1, Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, 13—75, 1978.
〔8〕 Simon, H. A., 心理科学通讯，第3期，65—69页，1981年。
〔9〕 Simon, H. A., 自然辩证法通讯，第3卷，第1期，40—48页，1981年。

THOUGHT PROCESSES IN SOLVING GEOMETRICAL PROBLEMS

Zhu Xin-ming
(*Institute of Psychology, Academia Sinica*)

Abstract

In our experiment we collected protocols from subjects who were solving geometrical problem and analyzed them from the point of view of cognitive psychology.

The result shows that: correct and quick recognition of the patterns which accesses the necessary knowledge in permanent memory is the key in solving geometrical problems.

The difference between the students with more experience and those with less experience is that the former recognized patterns more quickly and correctly than the latter whose activity showed more trial and error approaches; the former could, in some cases, keep away from interferences, while the latter suffered from them easily; the former were able to combine various related information for their reasoning while the latter utilized the information in isolation; the former could trade-off between backward and forward searches, while the latter were poor at using backward search.