心 理 学 报
第4期 ACTA PSYCHOLOGICA SINICA 1983年

以"1"为基础标准揭示数和数学中部分和整体关系的系统性教学实验[1)*]

张梅玲 刘静和 王宪钿 何纪全
中国科学院心理研究所
陈 胜 开
辽宁黑山北关实验学校

摘 要

本实验是一个旨在验证作者以前研究结果的系统性教学实验。作者运用以"1"为基础标准揭示数和数学中部分和整体关系这一原则，重新编写现用小学教材。实验是在黑山北关实验学校一年级进行的。学生均为就近入学的小县镇儿童。一年的实验教学结果表明：在这样一种知识结构下，在同一教学时间内，实验班学生比对比班多学了近150课时的内容；实验班的历次考试成绩均接近或稍高于对比班；在学习迁移能力等方面，实验班均高于对比班。这初步表明，上述原则可以较有效地应用于小学数学教学。

一、前 言

1979至1980年我们研究小组曾在儿童类和数的包含[1]、分数概念[2]、数的组成和分解[3]等四个方面进行了实验研究。从实验中看到儿童在解决类和数包含问题及掌握分数概念等方面的主要困难之一是儿童不能较好地掌握部分和整体之间的关系及确立基础标准"1"。为此，我们一方面重新学习了马列著作中有关一与多的论述，另一方面又深入小学教学实践，向有经验的数学老师请教，在此基础上我们认识到部分与整体关系不仅反映了客观世界的普遍联系，而且也是儿童掌握数学概念的重要环节之一。因而，我们提出了以"1"为基础标准，揭示数与数学中部分与整体关系，以促进儿童数学概念的掌握和认知能力的发展这样一个研究课题。1981年我们一方面对儿童部分与整体关系的认知从几何图形[4]、正整数[5]和分数[6]三方面进行深入一步的研究，从中初步概括出儿童对部分和整体关系认识的十二项指标以及认识的三个阶段和四个层次[7]；另一方面为了从实践中验证我们的设想，又设计了百以内数的认识[8]及乘除概念认识[9]的两个阶段性教学的验证实验。结果表明，以"1"为基础标准，揭示数和数学中的部分和整体关系来重新组织这部分

1）本文于1982年12月25日收到。
* 实验是在辽宁省黑山县北关实验学校进行的，得到该校领导和教师们的大力协助及热情支持，谨致谢意。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

算术知识的结构，有助于儿童对数学概念的掌握及促进其认知能力的发展。为了更深入一步验证我们的设想及较系统地观察儿童在此知识结构影响下认知发展的特点和规律，我们把现行小学算术教材重新组织，并于1981年秋季起在辽宁黑山北关实验学校开设一个实验班，计划进行四个学年，本报告是这个系统性实验教学的一个学年的总结。

二、方　　法

被试：以北关实验学校一年级一班(42人)为实验班，并以同年级的一年级二班(45人)为对比班，班级均由学校随机选择。该校的学生均为就近入学的一般小县城的儿童，入学时，两个班的学生各方面水平基本上接近。实验班的任教老师是自愿承担这项实验任务的年轻教师。

内容：实验班使用自编实验课本一、二册，对比班为人教社五年制统编教材一、二册。

实验班的教材特点是贯穿以“1”为基础标准，揭示数和数学中的部分与整体关系。

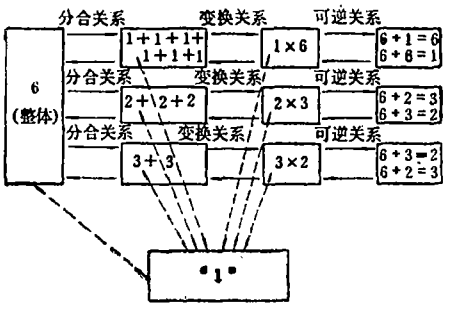
例一：百以内数的认识，采用1—10一次呈现，多次重复，突出数与数之间关系的教法，即强调“1”是自然数中最基本的，“1”可以代表1，也可以把10看作“1”，一个10是10，二个10是20……(见表1)。

例二：在乘除法的教学中，强调加法和乘法的变换关系及乘除法之间的可逆关系(见表2)。

表 1　百以内数的教学方式

○○○○○○○○○○	10	一个10	10
○○○○○○○○○○	10	二个10	20
○○○○○○○○○○	10	三个10	30
○○○○○○○○○○	10	四个10	40
○○○○○○○○○○	10	五个10	50
○○○○○○○○○○	10	六个10	60
○○○○○○○○○○	10	七个10	70
○○○○○○○○○○	10	八个10	80
○○○○○○○○○○	10	九个10	90
○○○○○○○○○○	10	十个10	100

表 2　乘法和加法、乘法和除法的关系



方法：以正常课堂教学为主，结合阶段性的书面测查和个别测查。教学时数由学校严格控制，两个班一律在学校规定的统一课时内完成教学内容及课外作业。

在第一学年共进行了以下几方面的测查*

1. 学生的迁移能力（对两个班学生均没有学过的万以内数的认识；万以内数的不

* 1、2、3、4项为书面测查，测查后抽查优、中、差12名学生个别询问其思惟过程，第五次为个别测查，两个班随机抽取学生30名。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

进位加法；进位加法；不退位减法和退位减法五个方面进行测查）；

2. 思惟的灵活性；

3. 乘除概念的理解；

4. 数学解题能力；

5. 对简单应用题的理解。

三、结 果

1. 学习内容及成绩

从表 3 我们可以看到，第一学年两个学期的期中和期终的考试成绩，实验班和对比班的差异只在1—2分之间，可以说成绩相当。9 次考试中，第一和第二学期的期终考试是锦州市的统考，这说明实验班的学生在全市统考中不仅能达到同年级的水平，且略高于对比班。

表 3 两班的学习内容和学习成绩的对比

学期	学习内容		学习成绩		
	实验班	对比班	实验班		对比班
第一学期	除同对比班相同内容外增加了：①100以内加减法 ②求两数差，求多几、少几的应用题	十年制算术统编教材第一册	期中(全班平均分)	99.0	99.7
			期终(全班平均分)	99.7	99.4
第二学期	除同对比班相同内容外增加了：①万以内数认识及加减 ②表内超 6 乘法和相应除法 ③包含除法应用题	十年制算术统编教材第二册	期中(全班平均分)	93.5	94.5
			期终(全班平均分)	99.3	97.3

从表 3 的教学内容来看，实验班比对比班在同样的时间内多学了相当不少的内容。在第一学期，除和对比班同样学了统编教材第一册内容外，还学了 100 以内加减法及求两数差、求多几和少几的应用题。第二学期多学了万以内数的认识和加减法及表内超 6 乘法和相应除法及包含除法应用题。实验班多学的内容以教学时数估计，大约在这一个学年中多学了近150课时的内容。所以从表 3 的两方面的内容结合起来看，初步可以表明第一学年的实验教学基本上是成功的。

2. 迁移能力

从图 1 我们可以看到实验班和对比班的五次迁移能力的测查成绩。这五次的测查内容均系两个班学生没有学过的，通过测查可以看出学生利用已有知识迁移到新知识的能力。对万以内数的认识，实验班平均成绩为86.1，对比班为70；万以内数不进位和进位加法，实验班分别为 89 和88.5，而对比班分别为 60.9 和 55.6；在万以内数的不退位和退位减

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

法，实验班分别为 95.1和 67.2，而对比班分别为66.8和 40.2，经统计考验，各次测查两班的差异均在 $P<0.001$ 水平上显著。五次测查的总平均实验班为85.2，对比班为 58.7，实验班比对比班高出 26.5 分。这就表明，实验班的学生在利用已有知识解决新问题的能力大大高于对比班的学生。

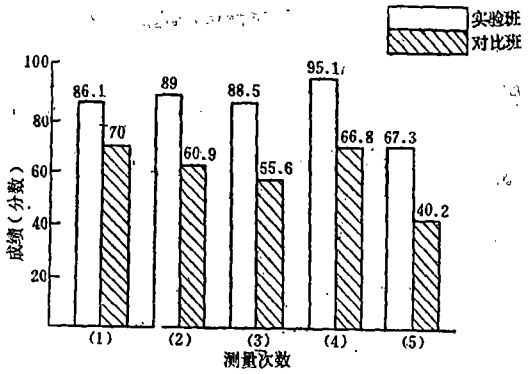


图 1　五次迁移能力测查成绩比较

3. 乘除概念的理解

对乘除法基本概念的理解方面的测查，实验班有13人得 100 分，3 人得90分以上，不及格 6 人为全班的14%、而对比班*，没有一人满分，仅有 1 人90分以上，而不及格却有28人，占全班62%。再将两个班测查的各题的错误率加以对比（图 2），更可以清楚地看到两个班之间的差异。如测查的第一题是要求学生把一道乘法算式用加法形式写出来，以考查学生对乘法概念的理解。实验班错误率为 9 %，而对比班为27%，他们的主要错误表现在对乘法算式中的被乘数和乘数的意义不清楚。如5×7＝35，当要求写成加法时，错误地写成7＋7＋7＋7＋7＝35，这是 5 个 7 相加，而 5×7 的意思是 7 个 5 相加。实验班的教学中突出加法和乘法的内在联系，同时以每份数，份数和总数来阐明其相互关系，所以学生对乘法中所列算式的每一个数是代表什么数比较清楚，对5×7这道题，大部分学生能清楚地指出 5 是每份数，7 是份数，5×7 就是每份是 5 这样的每份数有 7 份，所以应是 7 个 5 相加。又如第二题是要求学生根据一道乘法算式写出两道除法算式，并要说明是包含除还是等分除法。这题的主要错误是把等分除法和包含除法混淆。实验班错误率为 24%，对比班几乎一大半学生都搞不清楚。从图 2 我们可以看到两个班在乘除的基本概念上错误均较多，这说明学生掌握这些概念，尤其是包含除法是比较困难的，但实验班的错误率远低于对比班。

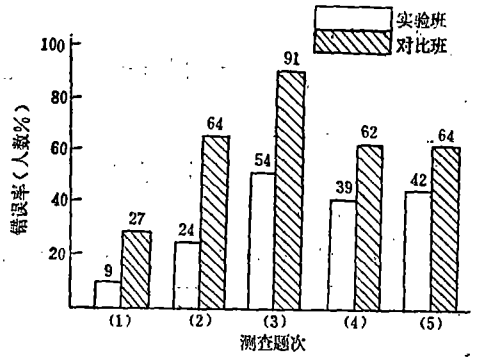


图 2　两班乘除概念错误率比较

4. 解题能力和思惟的灵活性

从表 4 看到，这三个年级四个班的数学解题能力测查的成绩，以实验班（一（1）班）的平均分最高（14.34分），相当于三年级的成绩（14.00分）而较之对比班（一（3）班）高出 11.27分。

思惟的灵活性是要求学生利用1—9九个数字和＋、－、×三种运算符号，列出答案是 6 的所有算式。从而观察所列的算式正确数及其策略特点。测查结果实验班平均为 94

* 用原对比班（一、三班），当测查时还没学到包含除法，所以这次测查成绩系同本校二年级四班作比较。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

表 4 三个年级解题能力成绩比较*

班级 \ 结果 \ 正确解题数	3 题		2 题		1 题		班级
	人数的%	得 分	人数的%	得 分	人数的%	得 分	平均分
三年级一班(54人)	4	120	18.4	400	22.2	240	14.00
二年级一班(43人)	9.3	240	4.7	80	35.0	300	13.25
一年级三班(39人)	—	—	2.5	40	10.0	80	3.07
一年级一班(41人)	4.9	120	12.2	200	36.6	280	14.34

* 由学校统一出题在三个年级四个班内测查。

分，对比班为66.7分，相差27.3分。从策略上看，实验班的学生表现出比较有规律性，即能按1、2、3……次序有计划地列式，所以就不易遗漏。

5. 解简单应用题的策略特点

从简单应用题的个别测查中初步可以看到在不同教学体系下学生解题的策略是不同的。

表 5 两个班解答简单应用题策略特点的比较

题目及解题策略：小红有3个球，以后小华又给她几个，现在小红有8个球，小华给小红几个球？		实验班(30人)		对比班(30人)	
策略	列式	人数	%	人数	%
①看总数部分数关系	8－3=5	21	70	1	3
②看分解，组成关系	3+5=8或8－3=5	7	23	12	40
③看文字	3+5或3+8=11	1	3	10	34
④从数字凑	3+4不是8，只能3+5才是8	1	3	7	22

表5显示实验班有70%的学生是从总数、部分数的关系来寻找题中的数量关系的，从而正确列计算式。大部分实验班学生一读题就说："这题告诉了我们总数，要求部分数，所以8－3=5"也有从分解组成关系来分析的说："因为8可以分解成3和5，所以3+5=8或8－3=5"这里3+5=8的列式是错的。而对比班从总数和部分数分析的只有1人，从分解组成关系分析的有12人占全班40%，而且多数列式是错误的，即写成3+5=8，同时有半数以上学生从文字上看或从数字上凑，说："又给了，就是加，所以3+8=11"由于他们不能从题中所给条件的本质上来分析，因而不能正确解答问题。

四、讨 论

1. 以"1"为基础标准揭示数和数学中部分和整体关系可以有效地应用于小学数学教学

在这第一学年的实验教学中，实验班的考试成绩基本上和对比班一样或偏高，而且多

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

学了近150课时的数学内容，实验教学可以说已获得了初步的成功。这说明在教材和教法上突出了以“1”为基础标准揭示数和数学中的部分和整体关系可以促进学生掌握数学概念和思惟的发展。根据我们过去一系列有关数学的研究结果，我们认为揭示认识对象的内在规律有利于主体的认识活动。认识活动的本源是外在的物质世界。物质世界有其内在规律。数与数之间有其本身的内在规律和联系，在我们教学实验中揭示其中一个方面的关系——数的部分与整体关系——组织成为系统并使之贯穿于儿童的学习内容，作为认识对象，这样是有利于主体的反映活动的。例如，在教学实验中，对10以内数的认识，我们就不同于传统的一个数一个数地教，而是采用1—10一次呈现，多次重复的教法，重点突出数的内在关系和组成，在数序上，3 在 2 的后面，3 比 2 多 1，而 3 又在 4 的前面，3 比 4 少 1；3 是由 3 个 1 组成的。一个数在一定关系中呈现，这样可以使儿童对这个数的理解更加深刻，我们研究组在幼儿园大班所进行的另一个有关百以内数概念的阶段性实验教学[8]，也就是采用了这样的教法，同样取得了较好的教学效果。这种教法不仅使学生加深了对数的理解，而且大大加快了教学进度。在教乘法时，则利用大小塑料口袋内装上小球来形象地说明加法和乘法的内在关系及对“1”的相对性的理解，例如6个小球可以放在 2 个小塑料口袋里，一个小口袋内是 3 个小球，再把两个小口袋放入一个大塑料口袋内，则一共是 6 个小球，也就是$3\times2=6$，写成加法是 $3+3=6$；如果一个小口袋内装 2 个小球，则要 3 个小口袋才是 6，即$2\times3=6$，写成加法是 $2+2+2=6$，儿童理解了整体数不变，各部分的数是随着小口袋的多少而相应增减。这样，学生较好地理解了加法和乘法的相互关系，也理解了“1”的相对性概念，“1”能代表一个大口袋里的 6 个，又可代表一个小口袋里 2 个或 3 个，还可以代表小口袋里的一个小球。这样对“1”的整体概念也更深刻了。因此在对乘除概念测查时，实验班的成绩就优于对比班成绩，因为实验班学生通过这种揭示加法和乘法的内在联系的教学，对乘法中的每份数，份数，总数就理解得比较深刻。再如在讲述包含除法时，我们是把乘除法放在一定的辩证关系中同时呈现，即一道乘法算式可以引出两道除法算式（见表 2）。正如一个学生在上课时回答老师问题时说：“$3\times8=24$这道乘法算式，可以导出两道除法算式，一道是 $24\div3=8$，这是总数除以每份数，求份数，所以这是包含除法；一道是$24\div8=3$，这是等分除法，因为这是求每份数。”可见揭示乘法和除法的内在本质联系可以较好地克服包含除法这个难点，有利于小学儿童较好地掌握数学概念和运算。

2. 教学和智能发展的相互关系

人的智能的发展，既有先天遗传的一面，也有环境教育等影响的后天的一面。智能的发展是依从于儿童本身的活动和他们对新知识内容的掌握而形成起来的。现有的发展水平是学习掌握某种知识内容的可能性的标准。发展心理学不仅要研究现有的发展水平，而且更要在“动”中研究发展的潜力以及作为认知对象的系统结构。在我们的实验教材中，以“1”为基础标准揭示数与数的部分与整体的关系来组织教材，在学生获得一定的认知结构后，又提出超出学生已有认知结构的新的对象，造成他们认识之间的矛盾以作为动力，并力图让学生利用已有认知结构来探索解决新的课题，从而有利于促进学生的智能发展。从第一学年可以初步看到实验班的迁移能力高于对比班。也就是说，这种揭示知识内在规律性的教学有利于学生领会基本的原理和观念，及培养和提高学生的迁移能力。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由五次迁移测查中所显示的学生的策略思想来看，都是从已学过的类似模式中找出共同点，用类似的原理推导到新的课题，从而正确地解决了新的问题。学生掌握了借位减法的原理和法则就能从已有知识推导出新的知识，能正确解答1243—718这样一道多位减法的算术题。正如美国心理学家在论述结构的重要性时所曾指出的"……领会基本的原理和观念，看来是通向'训练迁移'的大道……就是不但必须学习特定的事物，还必须学习那个适合于理解可能遇见的其他类似事物的模式。"[10]迁移能力是学生学习能力的一种，我们把它作为学生智能发展的一个指标。当然要说明智能发展和教学的关系，以及学生智能的发展是怎样得到促进的是一个很复杂的课题，还有待于进一步地探讨。

3. 关于认知结构和策略特点

在思惟的灵活性和对简单应用题的测查中，两个班的学生在解题中反映出不同的策略思想。例如要求学生列出答案是6的算式，实验班学生表现出思惟的规律性，从方法上看即先是加法，次减法、再乘法，从数上则是从1到5，有规律地依次列出一道道算式，例如1＋5＝6；2＋4＝6然后是7－1＝6，……再后是1×6＝6；2×3＝6……至于对比班则缺乏这种策略上的规律性，有的学生虽然也能列出十几道算式，但时而是2×3＝6，时而是7－1＝6，没有一定规律，所以容易遗漏和造成错误。那么实验班所表现出的策略上的规律性是否与我们实验教学突出揭示数与数的内在联系有关呢？即和学生在这种教学体系下所形成的认知结构有关呢？看来是有影响的，这种影响在应用题的个别测查中实验班学生和对比班学生也反映出不同策略类型。关于解答应用题的思惟特点，国内外均有不少研究，文字陈述的影响[11]，解题的思惟模型[12]等也有人做过分析，Resnich更提出未知数的顺序问题[13]，即未知数是始项，中项或末项其解题难度均有不同，她并提出儿童一旦掌握了部分和整体关系，就能正确地解决这类应用题。在我们的测查中虽然两班学生均有类似情况，但他们在解题策略上却不相同，例如小红有3个球，以后小华又给她几个，现在小红有8个球，小华给小红几个球？这样一道应用题，对比班学生有半数仅从文字上"又给"就用加法(3＋5＝8)甚至3＋8＝11；但实验班学生由于实验教学在解应用题时也突出部分与整体的关系来揭示应用题中的数量关系，所以极大部分学生，读一遍题，很快就说："用减法，8－3＝5，小华给小红5个球，因为这题已告诉了总数和一个部分数求另一部分数，所以总数减去一部分数。"学生具有这样的认知结构就能正确地分析应用题的数量关系，而不受陈述的语词和顺序的影响。一个很有兴趣的例子是：北关学校校长用这样一道智力性的题：180×(□□－□)＋□＝1983来测查该校的二、三、四、五年级学生，其结果实验班的二年级学生有22名学生(全班40人)能正确解答，而同年级的其他三个班却没有一个学生能解答，三年级有4人，四年级有7人，五年级有13人能正确解答此题。从实验班能正确解题的22名学生的解题方法上来分析，约有45％的学生用乘除之间关系来解决的，即用1983÷180＝11……3；约有40％单用乘法来算；5％把1983分解成1980＋3再用除法来算；约有10％学生以凑数来解答。在其他年级约有半数学生均用凑数来解答，有一个学生说："我先以21×180，再20×180……一直到11×180才接近1983"，而实验班近半数学生利用乘除关系又快又正确地解答了这题，这无疑是和实验班教学中突出乘除可逆运算的关系有关。由此，我们认为从我们的测查中初步看到不同的教学体系能使学生形成不同认知结构，而学生一旦形成了这种认知结构又会影响他在解决新课题时采用的策略。苏联

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

心理学家赞科夫在他《教学与发展》一书中曾提到“教学结构是学生一般发展的一定过程发生的原因”[14]。知识结构和认知结构之间关系及其和学生解题策略关系等问题尚须作进一步研究。

五、小　　结

1. 以“1”为基础标准揭示数和数学中部分与整体关系的教学体系，可以使学生较好地掌握数学概念，并节省时间，所以它可以有效地应用于小学数学教学实践。

2. 实验教学不仅能使学生有效地掌握数学知识，而且能较好地促进学生智能的发展。

3. 在实验教学体系影响下学生形成的认知结构，能促使学生采用较好的策略正确解决问题。此问题尚须做进一步的探讨。

参　考　文　献

〔1〕张梅玲，心理学报，第1期，1980年。
〔2〕王宪钿、张梅玲等，儿童心理与教育心理，第2期，1980年。
〔3〕林嘉绥，心理学报，第2期，1981年。
〔4〕何纪全、刘静和等，心理学报，第1期，1983年。
〔5〕林嘉绥，1981年心理学年会资料。
〔6〕张梅玲，刘静和等，心理科学通讯，第4期，1982年。
〔7〕刘静和、王宪钿等，心理学报，第3期，1982年。
〔8〕张梅玲、王宪钿等，心理科学通讯，第3期，1983年。
〔9〕何纪全，韩茹，将刊登于1983年度心理科学通讯。
〔10〕杰罗姆·S.布鲁纳，教育过程，上海人民出版社，1973年版。
〔11〕肖前瑛，心理学报，第1期，1965年。
〔12〕肖前瑛，心理科学通讯，第4期，1981年。
〔13〕Resnick, L. B., Syntax and semantics in learning to subtract, In T. Carpenter, J. Moser, & T. Romberg (Eds.), Addition and substraction: A cognitive perspective. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1982.
〔14〕赞科夫，教学与发展，文化教育出版社，1980年出版。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

A SYSTEMATIC TEACHING AND LEARNING EXPERIMENT OF APPLYING THE KNOWLEDGE OF THE PART-WHOLE RELATIONSHIP WITH "1" AS THE UNDERLYING BASIS

Zhang Mei-ling Liu Jing-he Wang Xian-tian He Ji-quan
(*Institute of Psychology, Academia Sinica*)

Chen Sheng-kai
(*Experimental School of Heishan Beiguan in Liaoning*)

Abstract

This is a systematic teaching and learning experiment aimed at verifying the results of the authors' previous experiments. It was carried out in the first grade of the Beiguan Experimental school in Heishan by using the content of the first book of the current arithmetic textbooks, reorganized by the authors on the basis of the principle of applying the knowledge of the part-whole relationship with "1" as the underlying basis. The results obtained in the more than one year's experiment with the pupils from Heishan, show that, under such a knowledge structure, children of the experimental class learned within the same period the contents of about 150 teaching hours more than those in the control class, that the results of the examinations obtained by the experimental class are near to or even a little better than those obtained by the comparative class, and that the competence of the former for learning transition is higher than that of the latter. This illustrates that the above principle can be effectively applied to the learning of arithmetic in the primary schools.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net