

数学心理学简介

马谋超

中国科学院心理研究所

一、数学心理学的发展

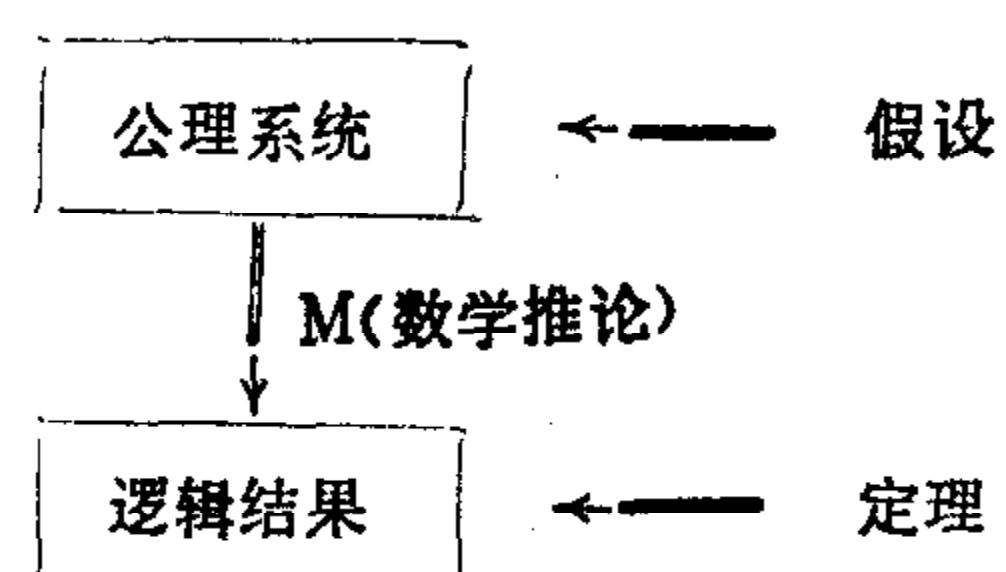
数学心理学可以理解为数学在心理学中的应用。它的起源可追溯到1860年费希纳(G.-T.Fechner)的工作。在那里，他尝试用一个函数，

$$R = K \cdot \log_{10} S$$

来描述物理量和感觉强度的关系。此后，许多心理学家都曾对心理变量测量的可能性和用数学形式表现心理现象的可能性，进行过多方面的探讨。例如，智力测量(C.E.Spearman, 1904)、态度的测量(L.L.Thurstone, 1928)、基本学习原则的数学表现(C.L.Hull, 1943)和社会心理学(K.Lewin, 1936)等等。但是，数学心理学的真正发展，则是在第二次世界大战之后，受到信息论、对策论、控制论、统计决策论以及正在发展中的计算机科学的推动才出现的。近代该领域的一个显著特点，就是用数学模型来表现心理现象。因此，人们也称此为现代的数学心理学。作为具有这一特点的早期工作，要算是本世纪五十年代初期，埃斯蒂斯(W.K.Estes, 1950)、布什(R.R.Bush, 1951)和莫斯蒂勒(F.Mosteller, 1951)等等提出的有关学习的数学模型。当今，数学心理学已渗透到实验心理学的许多重要领域，诸如，测量、选择、决策、学习和社会的相互作用等。

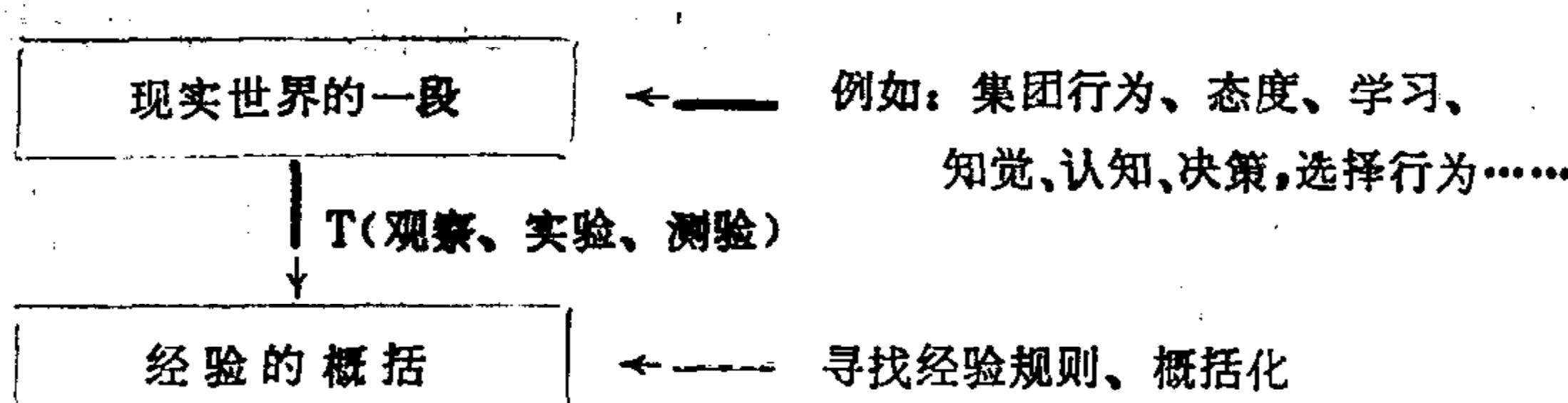
二、数学和经验科学之间的关系

数学系统是由一个公理系统和它的逻辑结果组成的。图解如下：



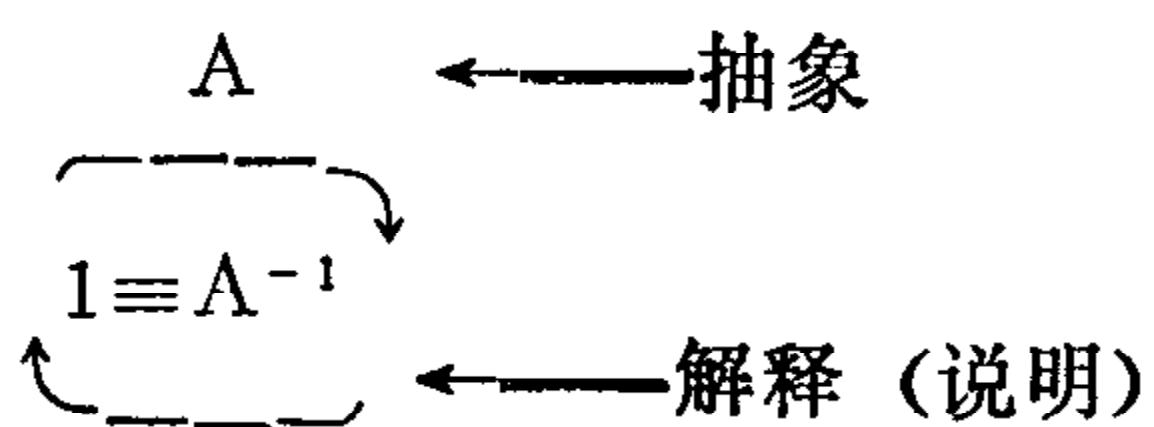
公理系统则是一组前提和公理组成的。所谓前提是不能定义的一些术语，诸如：点或元素一类的抽象对象，以及象“且”、“或”、“某些”、“全部”和“如果”一类的词。公理是无需证明的论断。不需定义的前提，应该避免定义的循环。比如说，一分钱是一元钱的一部分。同样，公理假设是真实的话，也应避免推论的循环。

经验系统指向于经验科学家所从事的那些有关现实世界规律性的研究。它的图解如下：



经验科学家可以用数学来描述得到的结果，例如：韦伯律， $\Delta R/R = K$ 。

经验系统和数学系统之间的映射，依赖于观察与说明。说明意味着理论。它使两个系统发生相互作用。



现实世界的经验系统，通过称之为抽象过程A被映射到数学系统。数学系统中假设所表征的性质和关系，被看作在经验系统里是有效的。如果假设是对的，那么，数学推论M得到的结论，也必定是对的。

解释过程I是把这些抽象的结论，再回到经验系统的结论中去。上述这种数学系统叫作“模型”。而经验系统是一种“现实化”或一个例证。抽象过程A，可使模型成为有关经验系统中的一种理论。

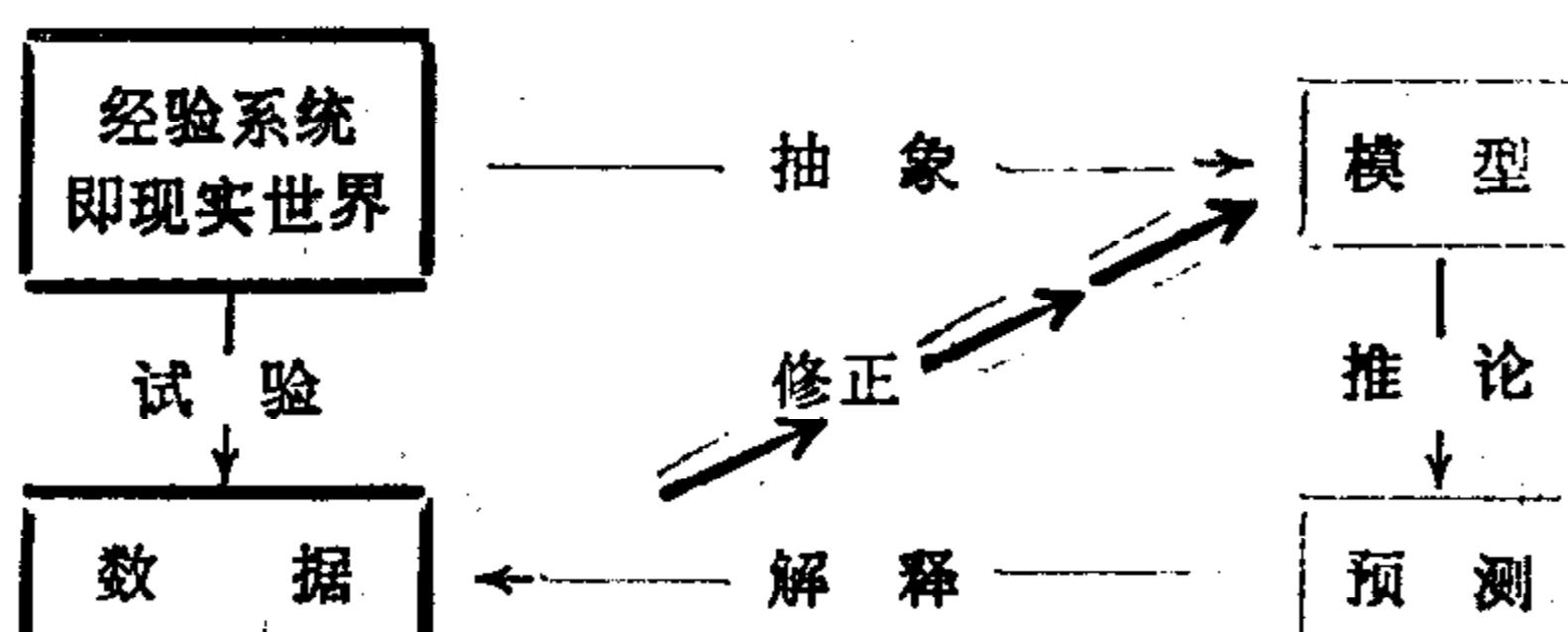
可见，获得有关经验系统的结论，有两条途径：

AMI, T

推论：观察。

建立模型的工作，是把需研究的心理现象、如知觉、学习、决策等等，从复杂的现实世界中孤立出来，构成一个特定的集合。在那里，原始资料被加工成集合中的对象和关系。然后，挑选一个特定的形式系统。形式系统可以是代数的、几何的和概率的，也可以是公理化形式、计算机程序和方程式。中心的问题是确立研究领域的经验系统和形式系统之间的对应关系。一旦建立起模型之后，应用它时，就可以把经验系统的对象和关系等同于形式系统中的元素和关系。藉助于逻辑推理和现有数学的规则，便能推出结果。这时，给以模型特定的解释，推出的结果便可看作是某种预测。判定预测的准确性，只需将预测值和实测值作出比较。如果两者的符合程度较差，这就需要对该模型进行修正。一个良好的数学模型是具有概括性、准确性和演绎力的。

下图描述了构造经验系统的一个模型以及该模型受观测数据检验的过程。



从逻辑上来看，否定一个模型，只有根据数据。如果一个模型(M)蕴涵着数据的某些特征(c)，那么，缺乏这些特征(c)就成了否定该模型的充分条件，但是，存在这些特征，也并不蕴涵着这个模型。例如，某个学习模型预测甲教学法优于乙教学法，那么，一旦发现乙优于甲时，该模型就被否定了，但是，甲优于乙的事实，对于确定该模型的有效性也并非充分，因为还可以由其它的模型来预测这个事实。

当A蕴涵B时，A为B的充分条件，反过来，B就是A的必要条件。具体地说，模型是数据特征存在的充分条件，而数据特征的存在，又是模型的必要条件。

同样，一个模型M₁比另一个M₂更一般，那么，作为一般模型的M₁一旦被否定时，它的一个个特例M₂也就被否定。

三、测量的数学模型

按史蒂文斯 (S.S.Stevens,) 的测量定义，测量就是根据某些规则，给客体或事件的属性指定数字。因此可见，测量可以看成是一个简单的数字（实数）的模型。具体地说，当我们测量物体重量时，全部待测物体构成一个集合，以A表示，且定义如下关系R即重于关系（“>”）和可联合操作的关系（“0”）。我们把这个经验系统写成

$$E = \langle A, R_1, \dots, R_n \rangle \text{ 或 } E = \langle A, 0, > \rangle.$$

令一个形式系统 $F = \langle B, S_1, \dots, S_n \rangle$ 或 $F = \langle B, +, > \rangle$ 。在这里，B表示正实数，

“+”表示实数间的普通相加运算，“>”表示实数间普通的不等关系。所说建造重量的测量模型是指在通过F表现E。它必须满足如下条件：存在一个从A到B的映射，使得A中的一系列元素之间具有关系R，具体地说，即“0”和“>”的关系。在B中其对象之间也存在与R相对应的关系S，即“+”和“>”，这种映射应该是这样的：联合两个物体的重量总数等于它们各自重量数之和（相加律），而且，重者的数大，轻者的数小。

对此，便有如下公理：

令A是一个有限集合，R是A上的一个连通的二元关系（即在A中所有元素配对上定义的一种关系）。如果R是传递的（即 $xRy, yRz, \text{蕴涵} xRz$ ），则那里唯一存在从A到实数的一个函数u，使得对于A中的全体x和y

$$u(x) > u(y), \text{ 当且仅当 } xRy \text{ (表示配对 } (x, y) \text{ 具有关系R).}$$

测量系统建立之后，对象集合A中的任一对象x，在实数集合B中就唯一存在量表值 $f(x)$ ，在这里，对象间的关系由它们的量表值之间的关系反映出来。若有另个数字系统N，也能保持E和F间的这种转换关系，那么，它就称之为可容许的转换。这种转换的集合决定着测量的量表类型和唯一性的程度。具体说，对于只根据对象间的序所作的测量，其所有能保存序关系的量表转换则都是可容许的。这就是说，任何两个可容许的量表由一个单调转换联系起来。这种量表叫作顺序量表。例如，假设三个对象x, y和z，人们对它们的喜好次序是x, y和z。我们确定 $u(x) = 3, u(y) = 2$ 和 $u(z) = 1$ 显然这种表现能够使量表值的序同喜好的序一致。同样，我们还可以确定 $u(x) = 17, u(y) = \sqrt{2}$ 和 $u(z) = 0$ 也仍然满足这个模型。实质上，任何满足不等式 $u(x) > u(y) > u(z)$ 的三个数，都可以用来做量表值。反之，任何量表值的集合则必须满足上述不等式。

假设对于对象之间的差异作序，那么，所容许的转换就限于正线性转换， $T(x) = ax + b, a > 0$ 。在这里，除掉一个任意的起点b和一个测量单位a之外，量表值是唯一确定的。例如假设 $u(x) > u(y) > u(z)$ 和 $u(x) - u(y) = u(y) - u(z)$ 亦有 $2u(y) = u(x) + u(z)$ 。用上面列出的数值，容易看出 $u(x) = 3, u(y) = 2$ 和 $u(z) = 1$ ，满足这个条件，可是，量表值 $u(x) = 17, u(y) = \sqrt{2}$ 和 $u(z) = 0$ 则否。因此，这里，一个可容许的转换，不仅必须保存量表值的序，而且，还必须保存量表值之间的差异的序。这样的量表，称为间距量表。它的一个典型例子就是温度的测量。

此外，某些测量模型对于数字量表的约束甚至更强。其转换关系只有类似于 $T(x) = ax, a > 0$ 才是容许的。这种量表值，除掉一个任意的测量单位a以外，便都是唯一确定的。这种量表称为比例量表。长度的测量就属此例。

至于可以主观地指定为任何一对一的转换（为运动员的号码）量表，叫做名义量表。

而量表值的任何转换均不容许（如计数）的量表，叫做绝对量表。上述两种量表是不多用的。

一些年来，有关测量的数学模型有了新的进展。例如，卢斯（R.D.Luce, ）和图基（J.W.Tukey, ）在1964年发展的联合测量模型。该模型认为，两个或两个以上独立的自变量联合作用，可指望获得一个因变量的序关系。它允许产生一种称为相加型的间距量表测量，亦容许一个正的线性转换。它的数学模型为

$$F(a, p) = f(a) + g(p)$$

这里， a 为一个自变量的某一水平， p 为另一自变量的某个水平， (a, p) 为两者的联合作用。 F, f 和 g 分别表示联合的以及两个自变量的函数。

四、选择与决策的概率模型

卢斯在1959年就个人的选择活动提出了一个概率模型。该模型认为在一个给定对象集合 T 中，被试从 T 中的一个有限子集 R 里挑选出某个对象 x 乃是受随机过程支配的。他的选择公理断言，从全集 T 中挑选 R 的一个元素 x ，其概率 $P(x, T)$ 等于 R 中挑选 x 的概率乘上 T 中挑选 R 的概率，即

$$P(x, T) = P(x, R) P(R, T), \quad RCT$$

如果我们把一份菜单，以 (T) 表示，从中挑选烤牛排 (x) 的概率，就等于从荤菜 (R) 中挑选烤牛排的概率乘上挑选荤菜的概率。

另一个选择模型是从柯姆斯（C.H.Coombs, 1950）的展开理论发展出来的。在这个理论里，各个对象和个人的理想点（假设的）都表示为共同维度上（即量表上）的分布或随机量。喜好的次序对应于各对象点与理想点的远近顺序。对于选择活动而言，选择甲物而不选择乙物，表明前者与理想点的距离小于后者与理想点的距离。鉴于刺激对象和理想点均是随机量，不言而喻，它们的距离也不例外。于是，展开的选择模型认为，选择甲物而不选择乙物的概率等于甲物与理想点距离小于乙物与理想点距离的概率。

令 U_x, U_y 和 I 分别表示和对象 x, y 与理想点相联系的随机量，则

$$P(x, y) = P(|U_x - I|) \leq |U_y - I|.$$

在现实生活中，人们会经常遇到具有不确定性的情境。在这种场合下，选择活动就被认为是一种决策。一个简单的例子就是掷骰子的活动。当人们判定掷的结果可能出现的是哪个数时，其决策的规则是它们的客观概率。可是，把这个活动与结果中特定的得失联系起来时，决策的规则变成了最大期望值。这正是信号检测的模型。该模型认为，反应的标准或阈限和先验概率 $P(SN)$ 、 $P(N)$ 及奖惩有如下关系：

$$\beta = \frac{P(N)}{P(SN)} \cdot \frac{\text{正确否定的奖励数} + \text{错报的惩罚数}}{\text{击中的奖励数} + \text{漏报的惩罚数}}$$

而令 d' 表示参数

$$d' = \frac{\mu_s - \mu_n}{\sigma_n}$$

即，平均数之间的差异被噪音分布的标准差除。这个参数表明感受性或辨别力的尺度。

五、学习过程的模型

学习可定义为一个反应的概率变化。学习过程可以看作在给定时刻上，主体处于若干状态中的一个。比如，研究老鼠走迷宫的学习活动，实际上，是通过观察在给定的测试（即时刻）上，她处于左右两个状态的哪一个实现的。形式上，把给定时刻n上处于状态i写成

$$X_n = S_i$$

具体说，在时刻1上，该过程处在什么状态，在时刻2上，又处于什么状态，如此类推，

$$X_1 = S_i, X_2 = S_k, X_3 = S_j, \dots \text{或简写成}$$

$$S_i, S_k, S_j, \dots$$

所说状态在数学上就是一个有限集合的元素。

下面我们来考虑一下动物的学习模型。在那里，假设她的学习是某次测试上顿悟的结果。很清楚，每次的测试仅仅是两个状态中的一个，即，顿悟前的状态 S_1 和顿悟后的状态 S_2 。整个学习过程可以看作是由许多 S_1 和 S_2 所组成的序列。如果动物的学习的确具有顿悟的特性。那么， S_1 和 S_2 的组成很明显是先有一连串 S_1 ，继之是一连串 S_2 。这样的情况，可以概括如下：

$$X_i = S_1, \text{ 当 } i < K \text{ 时}$$

$$X_i = S_2, \text{ 当 } i > K \text{ 时}$$

这里，K为产生顿悟的那次测试（特定的时刻）。

如果在状态 S_1 时，主体作出了正确的反应，那么，其概率应该是保持在某个机遇水平上，同时，处于状态 S_2 时，作出正确反应的概率，则应当为1。动物的行为符合这个模型，上述关于学习表现为顿悟的假设也就成立，反之亦然。这里，一个必要条件就是在最后的不正确反应之前，可能作出的正确反应是在一个恒定水平上。

把社会的相互作用作为状态的序列来研究也是可能的。例如，Leary (1957) 就曾用一个双极性维度（友好和敌意，支配和顺从）的系统来描述人与人之间的相互作用。用其最简单的形式，可以把两个人的相互作用描述为以下八个状态所组成的序列：

S_1 甲某是友好-支配的。

S_2 甲某是友好-顺从的。

S_3 甲某是敌意-支配的。

S_4 甲某是敌意-顺从的。

S_5 乙某是友好-支配的。

S_6 乙某是友好-顺从的。

S_7 乙某是敌意-支配的。

S_8 乙某是敌意-顺从的。

这两个人的相互作用，在任何给定时刻上都可以表述为 $X_n = S_i$ ，即在给定时刻n上，说明该相互作用是处在哪一种状态之中。换言之，他们之间的整个相互作用，可以由从最初到终结的一连串 S_i 的序列来描述。

在谈论学习的数学模型时，人们总要涉及到马尔柯夫 (Markov) 模型。该模型认为一个学习者可以被看作是处于几个学习状态中的一个状态。而每个状态在所有可能的反应

集合上都有其概率分布。学习被体现在从这次试验到下次试验状态的迁移。在任何一次试验中，被试的反应被表示为即刻的学习状态分布里的一次随机抽取。反馈之后，被试可以迁移到一个新的学习状态。这种学习状态的迁移概率是受第一级Markov链支配的。在技术上，马尔柯夫链可以如下定义。考虑状态S的任何序列，并把那个序列的上一个状态记作 S_i 。对于所有这样的序列和所有 X_n ， X_m 和 S_i 可能产生

$$P(X_n = S_i | X_{n-1} \dots X_{n-i} = S) = P(X_m = S_i | X_{m-1} = S_i),$$

即在状态S的任一序列之后产生 S_i 的概率，除掉上一个状态之外，与S中所有的状态无关，也与测试次数无关。具有这种特性的序列过程，就叫马尔柯夫链。

以上简述了数学心理学中的若干重要的方面。作为一个数学系统，它本质上是现实世界系统的一种类比。然而，类比并不局限于数学系统。它也可以在别的现实世界系统里找到。它们在逻辑上都是同一的。例如，人们可以用一种计算机程序去模拟一种知觉理论或用水管、水库和水泵的水利系统去模拟学习理论等等。

所有这些系统，在实质上都是不同的理论语言。它们都可以用来使那些在逻辑上具有同一性的模型形式化，并由此对经验系统观察到的东西给以解释。最终会有一天所有的系统都化成数学系统。

参 考 文 献

- [1] Coombs, C.H. et al, *Mathematical Psychology*, 1981
- [2] Coombs, C.H., *A theory of data*, 1964
- [3] Coombs, C.H., "The art of mathematical psychology" 1981.9. 来华的学术讲座。
- [4] Coombs, C.H. et al, "Some views on mathematical models and measurement theory" *Psychological Review* 61.2, 1954
- [5] Miller, G.A., *Mathematics and Psychology*, 1964
- [6] Stevens, S.S., *Measurement Psychophysics and Utility*. In *Measurement, Definitions and Theories* by Churchman, C.W. and Ratoosh, 1959
- [7] Luce, R.D., & Tukey, J.W., *Simultaneous conjoint measurement*: A new type of fundamental measurement, *J.Math.Psychology* 1, PP.1-27, 1964
- [8] Coombs, C.H., *Psychological scaling without a Unit of measurement* 57, PP.145—158, 1950
- [9] Debreu, G., *Review of R.D.Luce, Individual choice behavior: A theoretical analysis*. *American Economic Review*, 50, PP.186—88, 1960