心理学报
第3期 ACTA PSYCHOLOGICA SINICA 1986年

对知识结构和认知结构的关系的初探[1)*]

——《现代小学数学》的部分实验

张梅玲
中国科学院心理研究所

摘　要

本文是在四年系统的实验教学和临床实验基础上对知识结构和认知结构的关系进行的初步探索。结果表明，以"1"为基础标准揭示数和数学中部分与整体的关系为主线所构建起来的知识结构，使学生能形成良好的认知结构。这种结构有利于对新知识的学习、策略的选择和数学学习迁移能力的提高。

让我们的孩子变得更有知识更聪明些，这是时代的要求、父母的希望，也是儿童心理学工作者的义务。那末，如何达到这个目的呢？我们研究小组多年来重视儿童认知能力的发展，又深入小学数学教改实践，借助于小学数学来探索一条如何让孩子们变得更聪明一些的道路。并对儿童数学认知的发展及其内在规律进行了初步的探索。

一

我们认为，发展心理学既要研究儿童现有的发展水平，更要在"动态"中研究儿童发展的潜力，并揭示作为认知对象的知识系统结构的作用。

认知心理学派认为，学习是认知结构的组织与重新组织。他们既强调已有知识经验（即原有的认知结构）的作用，也强调学习材料本身的内在逻辑结构的重要性。对知识系统构建的研究，是当代认知心理学家们感兴趣的领域之一，也是认知心理学研究的一个主要趋势[1]。知识结构与认知结构有着密切的联系。

一门学科的概念、原理和法则是有其内在联系的，这种内在的本质联系构成这门学科的知识结构。主体是通过一系列的认知活动来构成自己的认知结构的。这种通过主体与客体互相作用而构成的认知结构与主体解决问题的能力有着直接关系，而认知结构的构成又与知识结构有关。因此，我们是从改建原有小学数学教材的知识结构着手的，以改建后的教材作为认知对象，从中探讨儿童掌握数学知识的认知过程和规律，以促进儿童数学智能的发展。

1） 本文于1985年11月12日收到。
* 本文所提到的实验曾得到辽宁省黑山县北关实验学校、北京市西城区奋斗小学领导的大力支持；陈胜开老师曾给予具体协助；中国科学院心理研究所刘静和教授审阅过本文初稿，并提出修改意见。在此谨向他们表示诚挚的谢意。

我们改建知识的基本思想或主线是：以“1”为基础标准来揭示数与数学中部分与整体的关系。数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学，它本身就有其内在的客观规律。我们只是把内在规律的某一方面有意识地显示和揭露出来。

儿童对单位“1”的认识及其整体守恒能力，是把握数学中部分与整体关系的两个核心概念。以“1”为基础标准的含意是：一方面，从性质上讲，“1”具有概括性、包含性、相对性和可分性；另一方面，就其在小学数学内容中的地位来说，“1”又是一个最基本的知识结构。儿童最初学习的1、2、3、4…这些自然数都是由若干个“1”组成的，如2＝1＋1，3＝1＋1＋1，自然数N＝1＋1＋1…（N个1）。反过来，任何自然数也都可分为若干个1。儿童从最初对一个元素的认识，逐步发展到对乘除法中的1份数，对一倍数、分数单位以及分数、比例等、应用题中假设的单位“1”或整体“1”，对比和正反比例的认识。这样“1”不但是个比值数值，而且又可以理解为比的概念。这就能通过揭示“1”的内容同时引入初步的变量概念。循着“1”这条发展线索构建起来的知识结构把整数、分数、小数、百分数、比值等概念基本上统一在一个系统之中，用“1”去说明它们的内在联系与层次间的过渡（见图1）。“1”的这些性质都存在于小学数学教材中，我们只是使之突出地显露出来，不断地揭示其本质，从而在教学过程中启发小学生，使他们能逐步发现和认识“1”的这些性质，进而逐步

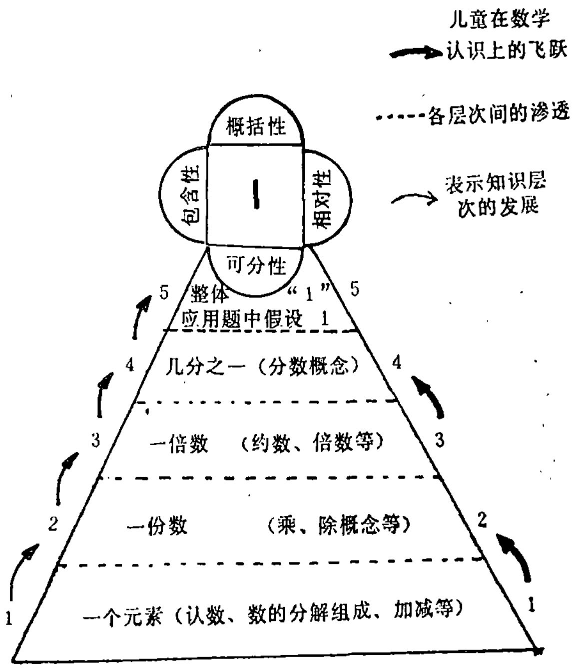


图1　以“1”为基础的示意图

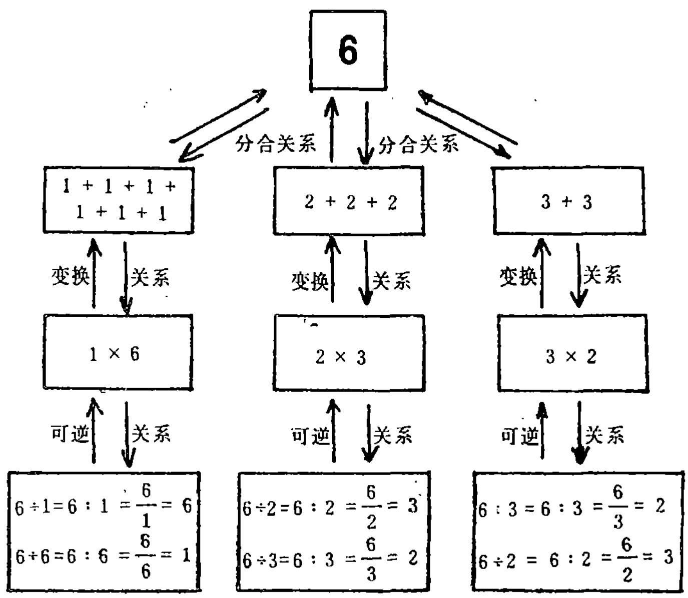


图2　以“6”为例各种关系示意图

认识数的形成和性质以及数与数之间的一些相互关系，并了解数的一般规律，目的是要促进学生数学智能的发展。

部分与整体的关系是小学数学概念和运算的一种内在的本质联系。我们研究组从四个心理学临床实验中总结出来的儿童对部分与整体关系的认识的十二项指标，有四个不同的层次，即数量之间分合关系、包含关系、互补可逆关系及补偿关系[2]。我们以“6”为例，其部分与整体的分合、变换和可逆关系如图2所示。

不少数学概念是带可逆性的，而可逆性思维能力又是对儿童智力发展起重要作用的思维能力之一。我们的实验教材在知识结构的编排上，从简单的两个数量之间大小、长短、多少的比较到加、减、乘、除的概念，基本上是成对地同时呈现给儿童的，使儿童在认识可逆性的内在规律的基础上构建自己的认知结构。这既有利于儿童对概念本身的理解，又有助于促进儿童可逆性思维的建立和发展，进而有利于提高他们解决问题的能力。例如，我们让儿童看一幅图，然后要求他们列出四个算式(如图3)。我们还要求学生用一句乘法口诀列出四个算式，如三七二十一，可列出：7×3＝21，3×7＝21，21÷3＝7，21÷7＝3。

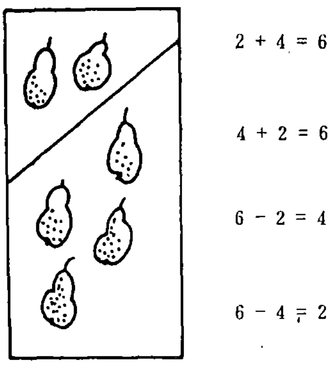


图3 加、减的部分与整体关系

二

学生用改建后的知识结构来进行学习，对构建认知结构和解决问题有什么影响呢？知识结构和认知结构与解决问题之间又有什么关系呢？我们在辽宁省黑山北关实验学校进行的第一轮实验(四年)中，通过教学实验和临床实验对这些问题进行了初步探索。

(一)知识结构与认知结构之间关系

儿童对任何新知识的学习总是在原有基础上进行的，是对原有认知结构的改组、扩大或调节，而重新构建起来的认知结构又为接受新知识作了准备。两者之间的相互作用促进着儿童智能的发展。

两者之间的相互依存和促进的关键就在于认知对象具有内在的本质联系。如儿童对分数概念的掌握历来是学生学习算术过程中的难点之一。实

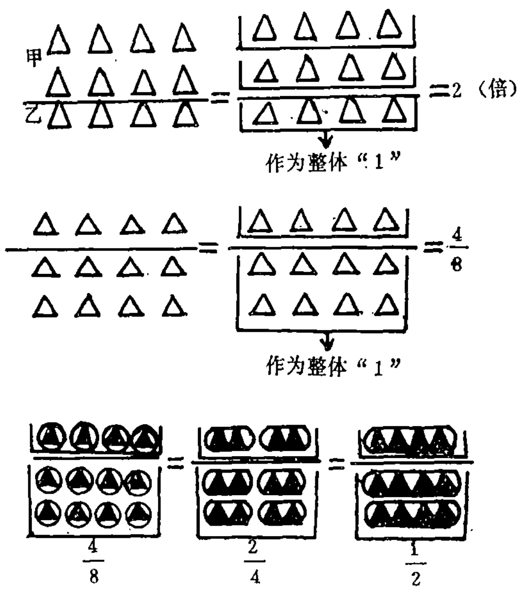


图4 从倍数过渡到分数的图示

验教材的知识结构的编排把分数作为一般形式，自然数1、2、3、4……仅是分母为1的一种特殊形式。所以，教材一开始就让儿童学习对1的认识。在“1与多”等知识构建中潜伏着学生在学习分数时所需的某些认知结构的成分，这样可以使学生从原有的倍数概念较顺利地过渡到分数概念，使整数部分知识和分数部分知识有机地联系起来。图4是引入分数概念的示意图。在实验教学中，学生上了一堂分数概念课后即能写出以分数形式表示的1，老师要求学生写出五个这样的1。全班90%的学生写的全部正确，只有几个学生写成$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$或$\frac{2}{1}$、$\frac{3}{1}$……等错误形式。在写对的学生中，有好几个学生写出诸如$\frac{1230}{1230}$、$\frac{52}{52}$、$\frac{444}{444}$等较大的数。有一个学生写的形式是$\frac{1000000\cdots\cdots}{1000000\cdots\cdots}$（只要线上和线下有一样多的0，就是1）。我们曾于1979年拿这道题对两所水平较高的小学的24各四年级学生作过一次测查[3]。正确率仅达65%，不少学生写出了$\frac{2}{1}$、$\frac{3}{1}$或$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{5}$等错误形式。我们可以从这个实例中看到，学生原有的群体“1”和“1与多”之间的相对关系这样一些认知结构，已经初步为学生吸收分数概念作了认知结构上的准备。原有的认知结构通过新知分数概念的纳入而变得更复杂、更丰富了。

另一方面，我们也看到原有的认知结构对分数的学习也有不相适应的成分，这就需要主体调整和改建原有的认知结构，使之适应对新知的学习。具体来说，把一个数作为标准“1”时，如果另一个数不满1个标准“1”怎么办？这时原有的认知结构就产生了不平衡状态，主体就得加以调整。这就要使学生从一个数和标准“1”相比是几个“1”过渡到标准“1”再分成若干相等的小份，得出这个数是标准“1”的几分之几这个分数概念。这种调整使不平衡又达到新的平衡状态，使主体在知识上和智能上都得到发展。主体不仅懂得群体“1”，而且懂得了“1”的可分性。这一得到扩大和重建的认知结构，又为进一步学习打下了基础。把“1”等分成10份就是$\frac{1}{10}$，等分成100份就是$\frac{1}{100}$，也就是百分数。这个1%也可改换成小数形式，写成0.01。这样，实验班的学生对百分数和小数的概念基本上不用教就能理解。从这里我们可以初步看到知识结构与认知结构之间的这种相互依赖关系。

（二）知识结构与主体策略选择的关系

学生在一个新的问题面前，选用什么策略来解决问题是与他原有的认知结构有关的，而他头脑中形成的认知结构又与他所构建的知识结构有关。因此，知识结构和主体解决问题时所选用的策略是有一定关系的。

首先，我们从简单应用题的个别测查[4]中可以初步看到，在不同知识结构教学下的学生，其解题策略是不同的。表1就是两个班解答简单应用题的策略特点的比较。表1显示，实验班学生在加减中突出$a+b=c$，$c-a=b$，$c-b=a$这一基本数量关系的教学下，有70%是从总数与部分数的关系中寻找题中的数量关系的，从而列式正确。大部分学生一读题就说：“这题告诉了我们总数，要求部分数，所以$8-3=5$”。而对比班采取这个策略的仅1人，大多数从数的分解组成关系列算式。值得注意的是，该班有34%学生受到了语词干扰的影响。他们说：“又给了，就是加，所以$3+8=11$”。而实验班犯这样错误的只有

1人。美国心理学家瑞斯尼克(L. Resnick)的研究也曾表明[5],以部分和整体关系构建加减之间的三量关系,能克服应用题陈述中的语词干扰。

表1 两个班解答简单应用题策略特点的比较

题目及解题策略		实验班		对比班	
小红有3个球,小华又给她几个,现在小红有8个球,小华给小红几个球?		(30人)		(30人)	
策略	列式	人数	%	人数	%
(1) 看总数、部分数关系	8－3＝5	21	70	1	3
(2) 看分解组成关系	3＋5＝8或8－3＝5	7	23	12	40
(3) 看文字	3＋5或3＋8＝11	1	3	10	34
(4) 从数字凑	3＋4不是8只能3＋5才是8	1	3	7	22

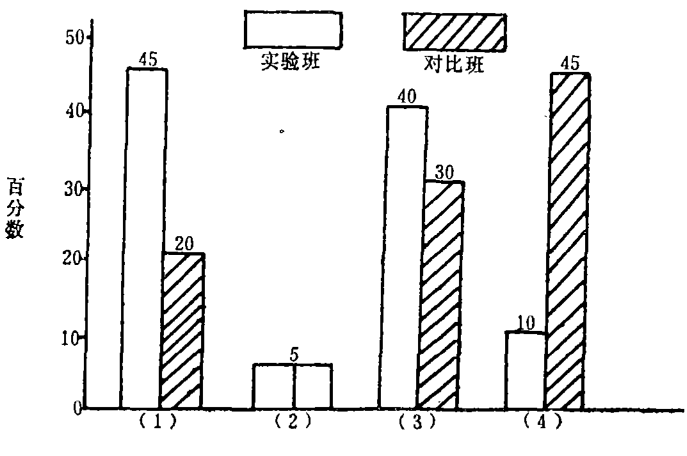


图5 解题的策略比较

其次,从学生解决180×(□□－□)＋□＝1983这道智力题所采用的策略上来看。解这道题大致有四种策略:(1)用乘、除之间的可逆关系,即用1983÷180＝11……3,就可以知道括号内不论填什么数只要相减是11便行,后面肯定填余数3;(2)先分解1983成1980＋3,再用乘除可逆关系;(3)用乘法;(4)凑数,有一名学生就说:"我先以21×180,再20×180……直到11×180才接近1983。从这四种策略的性质上来看,第一种是又快又好的较佳策略,第四种是很繁琐而又慢的策略。图5是不同班级在策略选择上的一个对比。

从图5可以清楚地看到,实验班近半数学生利用乘除关系又快又正确地解答了这道题。这无疑与实验教学中突出乘除可逆关系有关。正如一个学生所说:"我一看到这题180×…＝1983,我马上想到用1983÷180。"

最后,我们从两班学生在解决一个几何图形的拼合实验时所用的策略来看:这个实验的设计采用了比较能体现部分与整体之间协调关系的积木拼合。实验采用以学生操作为主、个别询问为次的方法。实验材料为4块大小一样的立方体(相对二面为红色、白色和一半红一半白),要求学生用四块同样的立方体,拼出以下两个图

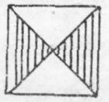
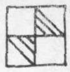
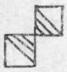
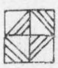
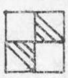
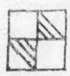
（甲  乙 ）。学生在拼这些图形时所采用的策略是不同的。各种不同的策略反应了不同的思惟水平，有的处在感知图形的直观水平上，有的处在概念水平上。我们以拼图形乙为例，共有被试90名，分为实验组和对比（1），对比（2）组。表2是实验的结果。从表2可以看出实验班全体能正确拼对这个图形，而对比（1）和（2）组不会拼

表2　拼合图形（乙）结果比较

实验组别	会						不会	
	感知水平（看一块摆一块）		概念水平（从三角形，对顶）		互逆水平（从图甲逆过来）			
	人数	%	人数	%	人数	%	人数	%
实验班（30人）	1	3	13	43	16	53	0	0
对比（1）组（30人）	11	37	9	30	7	23	3	10
对比（2）组（30人）	8	27	12	40	6	8	8	27

的分别为10%和27%。有不少学生一拼成  就说并好了。他们说："二个红的三角形，角对角。"而没有看出这标准图上的二个三角形是二个小红三角形合成的大三角形。有的摆成  后说："二个角对起来，"随后看看还剩二块，就把它们摆在原来的二块积木的上左方和右下方。有一个学生摆成  后说："二个红的对起来。"有一个学生操作的顺序是：（1）（2）（3）（4）（5）（6）。他边操作边自言自语地说："二个红的角对起来。"这些错误的主要原因是，学生没有把握图形的部分与整体的关系及两者之间的协调。实验班的学生大多数边看图形边说："二个大三角形对着，二个小的合起来……"。这里使人特别感兴趣的是，有半数以上的实验班学生拼这个图相当快，大多数只用5秒左右时间就能完成。他们一看这个图形就马上把原拼成的图甲（）左右手各拿起二块，然后双手一交叉，同时说："把这图（指原已拼好的图甲）反过来就可以了。"实验班采用这种策略的有53%的学生，而对比（1）、（2）组只有23%和7%。这个结果初步表明，以揭示数量之间的部分和整体关系作为主要思惟结构的实验教材，确实有助于实验班学生协调部分与整体之间关系。

（三）知识结构与学生迁移能力的关系

迁移问题是学习心理学长期研究的一个问题。现在这项研究已发展到对教材的知识

结构和主体的认知结构的研究。因为，迁移问题的实质主要是如何使学生具有良好的认知结构的问题。苏联教育心理学家赞科夫在他的《教学与发展》一书中曾提到“教学结构是学生一般发展的一定过程发生的原因”[6]。我们改建的教材力图揭示数和数学中内在的本质联系，使学生形成良好的认知结构，提高他们的学习迁移能力。改建后的教材以“1”为基础标准，这使儿童不仅懂得“1”代表一个物体，而且懂得“1”也可以代表一个群体。主体在这样一种知识结构下通过一系列认知活动所构建起来的认知结构，是儿童学习数学的主要认知结构之一。如当学生学习对百和千的认识时，百和千作为知识，对学生来说，是新的。但从认知结构上来看，学生为接受这部分新知已有了一定的认知结构上的准备，也就是说，学生只需要通过同化和调节对原有群体“1”的结构稍加改建，便能较快地把这部分新知纳入原有的认知结构之中。学生自己能说把10作为1，1个10是10，2个10是20……，从而较快地认识了百以内的数，并且能较好地区分“111”这个数中三个“1”的含意。在教千和万以前，我们测查了学生在千和万的认识上的迁移能力。图6就是这次测查的结果。在测查前两个班学生已掌握的知识内容是同样的，所测查的内容也是两个班学生都没有学过的，所不同的仅仅是两个班先前学习的这部分知识的结构是不同的，在这种情况下，通过测查，我们可以初步看出学生的迁移能力，也可以为研究主体在不同的知识结构下构建起来的不同的认知结构对解决问题的影响这个问题提供一些依据。从图6可以看到的测查结果是，对万以内数的认识，实验班平均成绩为86.1，对比班为70；万以内数不进位加法和进位加法，实验班的平均成绩分别为89和88.5，而对比班分别为60.9和55.6；万以内数的不退位和退位减法，实验班的平均成绩分别为95.1和67.2，而对比班分别为66.8和40.2。经统计考验，对比测查的差异达到了显著水平。这个结果初步表明，实验班学生所构建的认知结构，使该班学生具有比对比班更强的知识迁移能力。测查后，主试曾询问一些同学：“老师没有教，你是如何知道的。”一个学生说：“我也可以把100作为1呀！一个100是100，2个100是200，……10个100不就是1000。1000也可以当作1，10个1000是10000……；”另一个同学带着既神秘又高兴的神情对主试讲：“老师，我这里发现，10比1后面多一个0，100比10又多一个0。我想1000一定是100后面再加一个0，1000后面再添一个0就是10000，对不对呀？”

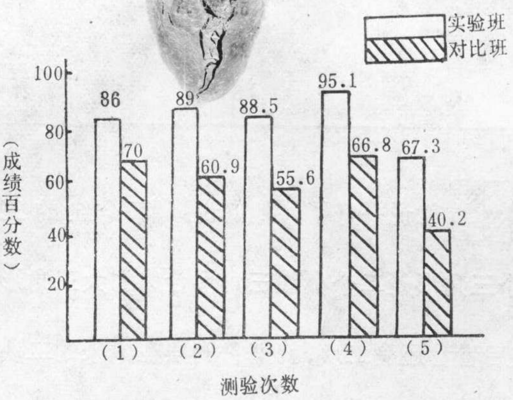


图6　五次迁移能力测查成绩比较

又如在一次乘、除概念的测查中，有一道题要求学生根据8×3=24写出两道除法算式应用题，并说明所编的题是包含除还是等分除法。学生解题时的主要错误在于混淆等分除法和包含除法。实验班错误率为24%，对比班为64%。再如要求学生把5×7这道乘法算式转换为加法算式，对比班不少学生错误地写成7+7+7+7+7=35，成了5个7相加（而5×7的意思是7个5相加），对比班错误率为27%，实验班为9%。这里我们可初步看

到，实验班学生在改建的教材知识结构学习中所形成的乘、除之间可逆的认知结构，对学习新知识能力具有一定的促进作用。这具体表现在知识学习迁移能力较强，做题时对习惯性的错误相对地较低这一点上。

三

近四年来，我们研究小组对知识结构和认知结构与解决问题的关系进行了初步的研究，所取得的一些实验材料只能为进一步探索这个问题提供一些具有启发性的线索。要进一步研究的问题还很多。

研究的方法也是个值得探讨的问题。我们的这项研究涉及到主体与客体两个方面的结构这个复杂的问题，因此它不是靠一、二个实验就能解决问题的。研究的方法当然可以是多种多样的。国外在这方面的研究，大多以儿童口头报告方法为主[7]。我们则以改建的知识结构作为认知对象，进行阶段性和系统性的教学实验，并结合临床实验，(儿童口头报告和实际操作)来探索这个既复杂又有趣的课题。研究结果表明，这样做不仅能使心理学理论更好地为小学数学教改实践服务，也有利于儿童发展心理学理论本身的发展。但是，仅就小学数学来讲，知识结构如何构建；知识结构和儿童智能发展的关系；在网状结构的知识体系中，知识的关键生长点是什么；在阶梯结构中，知识的层次与学生的认知水平又有什么关系——这些问题还有待于作进一步的研究。

参　考　文　献

〔1〕Gelman, R., Recent Trends in Cognitive Development, a lecture in the 1982 G. Stanley Hall Lecture Series at the annal meeting of the American Psychological Association, Washington, DC. 145—146, 1982.

〔2〕刘静和，王宪钿等，儿童在数和数学上部分与整体关系认识发展，心理学报，第3期，1982年。

〔3〕王宪钿，张梅玲等，儿童掌握分数概念实验研究，儿童心理与教育心理，第2期，1980年。

〔4〕张梅玲，刘静和等，以"1"为基础标准揭示数和数学中部分和整体关系的系统性教学实验，心理学报，第4期，1983年。

〔5〕Resnick, L. B., A Devolopmental Theory of Number Understanding, The Development of Mathematical Thinking, ACADEMIC PRESS, New York, 3:125—145, 1983.

〔6〕赞科夫，教学与发展，文化教育出版社，1980年。

〔7〕Ginsburg, H. P., Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking, The Development of Mathematical Thinking, ACADEMIC PRESS, New York, 1:16—21, 1983.

A PRELIMINARY STUDY OF RELATIONSHIP BETWEEN STRUCTURE OF KNOWLEDGE AND COGNITION

Zhang Meiling
(*Institute of Psychology, Academia Sinica*)

Abstract

The paper presents a preliminary study of the relationship between structure of knowledge and cognition, carried out on the basis of four years of systematical teaching and clinical experiments. The results show that the structure of knowledge constructed under the part and whole relationship in number and mathematics with "1" as the underlying basis permits the child's forming of a better cognitive structure, which would contribute to the learning of new knowledge, the choice of strategies as well as the increase of transfer ability in learning mathematics.