数学在心理学中的一些应用

马谋超　曹　震　（中国科学院心理研究所）

心理学是研究人脑如何对客观现实作出反应的一门科学．客观现实中的各种对象统称为“刺激”，而由它引起的心理活动称为“反应”．心理学企图通过控制一定的试验条件，把外界刺激作成可测的系列变量，进而测量由此引起的一系列相应的心理变化．实验表明，在刺激变量和心理反应变量之间存在着一定的关系．当心理变量有了适当的测试手段之后，这种关系就有可能用一种适当的数学关系表达出来．早在十九世纪，一些学者就开始了对这个问题的研究，由此导致了心理学的一个领域——心理物理学的诞生．这是数学应用于心理学研究最早而且颇有成效的一个领域．自此以后，数学在心理学中的应用不断得到发展．随着模糊数学的诞生，更出现了新的情况．现将这些应用的内容概述如下．

一、心理物理的函数关系

在晴朗的夏日夜空，人们很容易看到满天繁星，而在白天则极难觉察到它们的存在．这个熟悉的现象告诉人们：对于刺激强度变化($\Delta\phi$)的觉察与原有刺激强度(ϕ)之间存在着某种关系．这种关系后来被心理学家们称为刺激的临界值函数．1834年，德国科学家韦伯(E. H. Weber)最早研究了所谓提重的辨别试验．他发现，在对相当重的两个物体进行重量辨认时刚好感觉到有差别所需要的物理差别量即差别阈①，要比在两个相当轻的物体上产生的差别阈大．进一步的研究表明，差别阈是刺激强度的线性函数，即：

$$\Delta\phi=C\phi,\quad 或\ \frac{\Delta\phi}{\phi}=C, \tag{1}$$

这就是著名的韦伯律或称韦伯分数．

1860年，费希纳(G. H. Fechner)在韦伯律的基础上进一步提出了如下基本假设：

1．在一定的刺激范围内，所有的最小可觉差②(JND)在主观上都是相等的，可以作为感觉量的单位．

2．反应量可看作若干JND单位的总和．

这样，韦伯律可以表示为：

$$\frac{Kd\phi}{\phi}=dr, \tag{2}$$

这里K是一正常数，dr是由JND引起的感觉量增量．由上述假设知各个JND所引起的dr都是相等的．

解微分方程(2)，得：

$$r=K\ln\phi+C. \tag{3}$$

当ϕ取阈限值③ R时，感觉量r为0，即

$$0=K\ln R+C,$$

或

$$C=-K\ln R. \tag{4}$$

将(4)代入(3)，得：

$$r=K(\ln\phi-\ln R),$$

$$r=K\ln\left(\frac{\phi}{R}\right).$$

若令R为单位1，则有：

$$r=K\ln\phi. \tag{5}$$

(5)式称为费希纳律．

1957年，史蒂文斯(S.S. Stevens)在大量实验的基础上提出感觉量与刺激之间存在着幂

① 感觉所能觉察的刺激物的最小差异量叫做差别感觉阈限，简称差别阈．

② 差别阈又叫做最小可觉差．

③ 这里的阈限值指的是绝对感觉阈限．那种刚刚能引起感觉的最小刺激量称为绝对感觉阈限．

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

函数关系，这就是史蒂文斯幂定律，可表示为：

$$\psi = K'\phi^a, \qquad (6)$$

其中 ψ 是感觉量，ϕ 是刺激强度，K' 是决定量表单位的常数，a 是依赖于感觉方式和刺激条件的幂指数.

在(6)式中，若 $a=1$，则感觉量与刺激强度成线性关系. 若 $a>1$，则 ψ 增长得较快. 若 $a<1$，则 ψ 增长得较慢.

对(6)式两边同时取对数，得：

$$\ln\psi = a\ln\phi + \ln K',$$

在对数坐标轴上，(6)式变成以 a 为斜率的直线方程.

如果史蒂文斯律成立，那末量表问题实际上就是通过 ψ 和 ϕ 值来确定相应的幂指数 a 的值. a 值成为感觉量与刺激量之间关系的一个重要指数. 表1提供了在不同试验条件下取得的幂指数值.

表 1　不同试验条件下的幂指数

连续量	刺激条件	测得的指数
响度	300 赫纯音声压	0.67
振动	加于手指 60 赫振幅	0.95
振动	加于手指 250 赫振幅	0.6
明度(自我发光体)	黑暗中的 5° 靶面	0.33
明度(自我发光体)	点光源	0.5
明度(自我发光体)	闪烁	0.5
明度(自我发光体)	闪烁的点光源	1.0
明度(反射体)	灰纸反射	1.2
视觉长度	投影线	1.0
视觉面积	投影面积	0.7
红(饱和度)	红-灰混合物	1.7
味	蔗糖	1.3
味	盐	1.4
味	糖精	0.8
臭	庚烷	0.6
冷	金属接触手臂	1.0
温热	金属接触手臂	1.6
温热	皮肤上小面积的辐射	1.3
温热	皮肤上大面积的辐射	0.7
不适，冷	全身辐射	1.7
不适，热	全身辐射	0.7
灼痛	皮肤上的热辐射	1.0
触粗糙度	磨擦砂布	1.5
触硬度	挤压橡胶	0.8
手指跨度	方块厚度	1.3
掌压	皮肤上的静力	1.1
肌肉力量	静收缩	1.7
重	提重	1.45
粘性	搅动硅酮溶液	0.42
电击	电流通过手指	3.5
发声力量	口头声压	1.1
角加速度	5秒旋转	1.4
久暂(持续时间)	白噪音刺激	1.1

二、感觉的信号检测模型

自从费希纳提出感受性测量以来，这个问题就一直为心理学界所瞩目. 传统的阈限理论以感觉阈限作为感受性的度量，后来人们发现，感觉阈限实质上是辨别力和反应倾向的混合物. 比如，被试为了证明自己的辨别能力强，常常愿意在刺激一出现时，就做出有信号的反应，尽管这时被试还未弄清出现的刺激之中是否包含需要作出反应的信号. 如何将辨别力和反应倾向分开，正是感觉测量中必须解决的关键问题. 1954年，美国密执安大学的詹纳(W. P. Janner)和斯韦茨(J. A. Swets)从无线电工程学的信号检测论中受到启发，将检测反应器对光电传感器产生的噪音和信号分别作出反应的原理，应用到人类认知过程中去，成功地解决了这个问题.

与传统的阈限测量方法不同，信号检测论的方法是在测量感受性的实验中引入噪音，使得传统实验中单纯对信号作出反应的过程，变为对信号和噪音加以辨别及判断的决策过程.

信号检测论的基本原则就是根据观察到的某事件，从两个可供选择的假说中选择一个. 它认为，在选择假说的过程(即决策过程)中，必须有一个可以参照的标准，当事件可观察的某些方面超过这个标准时选择一种假说，否则选择另一种假说.

为此，信号检测论有两点基本假设：

1. 信号的觉察有一个中枢神经效应. 它随呈现刺激的时刻不同而发生变化. 中枢神经效应既可能由信号刺激引起，也可能由噪音(一切内外干扰背景的总称)刺激引起.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2. 由信号(SN)引起的感觉和噪音(N)引起的感觉是不易分清的. 判定一个特定的感觉是由SN还是由N引起，是根据统计决策论来决定的.

信号检测论有两种模型：参数分析模型和非参数分析模型.

参数分析模型

这种模型有两个前提假设：1)对每个被试而言，由N和SN分别引起的感觉连续量的次数分配曲线$f_N(x)$和$f_{SN}(x)$均为正态分布；2)这两种分布曲线的方差相等. 如图1所示.

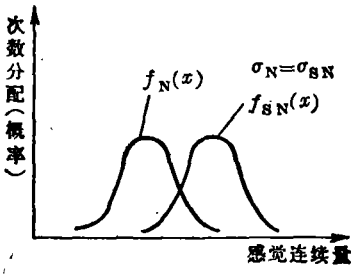


图1 感觉连续量的次数分配曲线

在上述假设下，被试的辨别力取决于由N引起的感觉与由SN引起的感觉之间的差异程度. 这两种感觉之间的差异愈大，则N和SN的界线显得愈分明，对N和SN的分辨也就愈容易，从而被试的辨别力愈强. 因此引入d'作为对辨别力的度量，即

$$d'=\frac{M_{SN}-M_N}{\sigma_N}, \tag{7}$$

其中M_{SN}是SN引起的感觉连续量的平均值，M_N是N引起的感觉连续量的平均值，σ_N是$f_N(x)$的方差.

设X为任一感觉连续量，则(7)式可变为：

$$d'=\frac{M_{SN}-M_N+X-X}{\sigma_N}=\frac{X-M_N}{\sigma_N}-\frac{X-M_{SN}}{\sigma_{SN}}=Z_N-Z_{SN}, \tag{8}$$

其中σ_{SN}是$f_{SN}(x)$的方差，Z称为标准分数. (8)式即为d'的计算公式.

信号检测论的特点之一就是不仅能测量出被试的辨别力d'，同时还能测量出被试的反应标准. 不同的被试的反应标准往往不同. 有些被试反应标准较严，即只有当刺激足够鲜明时，才肯作出"有"或"无"的反应，而另一些被试反应标准较宽，只要一出现刺激，便立刻作出回答. 这种反应标准反映了被试的反应倾向，而反应倾向是依个人主观性而定的.

为了说明反应标准，引入似然比的概念. 设x为任一感觉连续量，令$L(x)=P(x|SN)/P(x|N)$，$L(x)$称为似然比. 在上式中，$P(x|SN)$为在条件SN下感觉x出现的概率，$P(x|N)$为在条件N下感觉x出现的概率. 原则上，任一感觉连续量均可作为反应标准.

设x_c为被试所选择的反应标准，x_i为第i次观察引起的感觉量. 根据信号决策理论，当$x_i\geqslant x_c$时，被试反应为"有"；当$x_i<x_c$时，被试反应为无.

从数学上可以证明，若用x_c的似然比作为反应标准，也完全与之等价，即：令$\beta=L(x_c)$，若$L(x_i)\geqslant\beta$，则被试反应为"有"，若$L(x_i)<\beta$，则被试反应为"无".

设x_1、x_2分别为甲、乙两个不同的反应标准，若$\beta_1>\beta_2$，则$x_1>x_2$，也就是说，若$\beta_1>\beta_2$，则甲反应标准严于乙反应标准.

由此可见，β完全能够刻划反应标准. β较大，则反应标准较严；β较小，则反应标准较宽. 图2所示接受者操作特点曲线(简称ROC曲线)上各点反映了在特定刺激条件下被试所采用的各种反应标准. 图中$P(y|SN)$轴表示被试在SN条件下反应为"有"的条件概率，$P(y|N)$轴表示被试在N条件下反应为"有"的

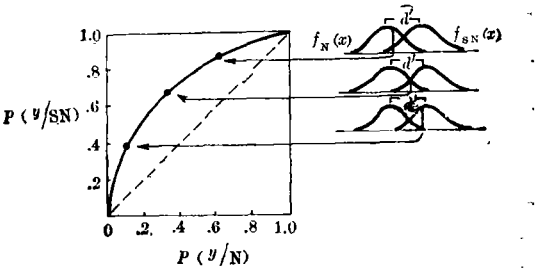


图2 ROC曲线

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

条件概率.

β 和 d' 彼此独立. 当 x_c 改变时，因 $P(y|SN)=\int_{x_c}^{+\infty} f_{SN}(x)dx, P(y|N)=\int_{x_c}^{+\infty} f_N(x)\,dx$, $P(y/SN)$ 和 $P(y|N)$ 要随之变化，但只要噪音和信号的强度不变，由此分别引起的感觉连续量的平均值之差不变，即 d' 保持恒定. 因此图2中的曲线又叫做等感受性曲线，即曲线上各点的 d' 不变.

这样，根据信号检测论，就可以分别用 d' 和 β 去度量辨别力和反应标准而彼此不受干扰.

非参数分析模型

在前述模型中，由于是用 M_{SN}、M_N 和 σ_N 作为参数去度量 d'，故而得名"参数分析模型". 参数分析模型由于其前提假设难以保证而受到限制，因此有人提出非参数分析模型. 目前国内外已广泛采用非参数分析模型来处理信号检测的实验数据. 下面对这种模型的具体使用方法作一简要介绍.

将一定数目的信号和噪音混合起来，随机排列，依次呈现给被试. 每呈现一次刺激(SN或N)，被试按照给出的若干类别在自认为最合适的那个类别上作出反应. 例如：SN和N各100次，并给出六个类别："肯定无"，"很可能无"，"可能无"，"可能有"，"很可能有"，"肯定有"，依次给定类别数1，2，3，4，5，6. 主试者分别统计出实验中被试对SN和N在各个类别上作出反应的次数，并计算出相应的频率

表 2 非参数分析模型实验

		1	2	3	4	5	6	Σ
N		3	8	14	15	20	40	100
SN		38	20	16	14	10	2	100
频率	N	3%	8%	14%	15%	20%	40%	
	SN	38%	20%	16%	14%	10%	2%	
累加	$P(N)$	3%	11%	25%	40%	60%	100%	
	$P(SN)$	38%	58%	74%	88%	98%	100%	

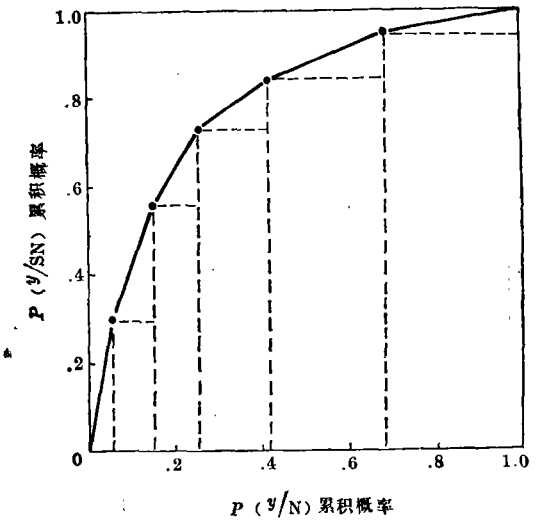


图3 SDT(信号检测论)的一个非参数模型中的ROC面积的计算(ROC围成的面积被定义为 d')

(%). 将SN和N的各个频率依照给定的类别从左到右逐次累加，得到各自的累加数，如表2所示.

以 $P(SN)$ 为纵坐标，以 $P(N)$ 为横坐标，作出ROC曲线，如图3所示.

设ROC曲线、X 轴及直线 $X=1.0$ 三者围成的面积为 S，则感受性 d' 定义为：$d'=S$.

如果 $S=0.5$，则被试的感受性最低；如果 $S=1.0$，说明被试每一次判断都是正确的，感受性最高. 如何衡量反应标准呢？这里是以各个类别的带权平均数来表示的. 即：

$$\beta=\frac{\Sigma f_i\omega_i}{\Sigma\omega_i},$$

其中 f_i 是类别等级数，$i=1, 2, 3, 4, 5, 6$，ω_i 是第 i 类别SN次数与N次数之和.

使用非参数分析模型没有前提条件的限制，这使它较之参数分析模型有一定的优越性.

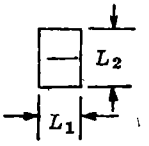
三、模糊数学在心理学中的应用

精确数学是建立在集合论的基础上的. 集合论认为：任一研究对象 x，要么具有性质 A，$x\in A$，要么不具有这种性质，$x\notin A$，二者必居其一，从而忽略了 x 在多大程度上具有这种性质. 因此有人认为集合论实质上是扬弃了事物

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的模糊性而抽象出来的，是将思维过程绝对化来达到精确和严格的目的.

在心理学中，模糊现象屡见不鲜. 读者不妨做一个实验，即写一个形状如下的字：



令其横与竖的比例$L_1/L_2=0.95$，然后将这个字拿去问周围的人，它的形体更象"日"字还是更象"曰"字？显然这是个模棱两可的问题，也就是说这个字形对于"日"字和"曰"字都有一定的符合程度. 对这类模糊现象提供适宜的描述手段的是模糊数学. 这里仅介绍模糊集合论对于发展心理量表的作用以及模糊熵在推理过程中的应用.

类别判断的模糊集模型

传统的心理学在对刺激物的类别进行判断时采用的是类别量表. 传统的类别量表存在两方面的问题：其一，当心理连续量被划分成若干类别时，其间的界线是分明的；其二，在操作上要求被试把待测对象归入其中的某一类别. 以上述实验为例，在判断所写字形象不象"日"字时，传统的方法是将量表划分成若干类别，如"很象"，"比较象"，"中立"，"不怎么象"，"很不象"等，然后在其中一个类别上作出肯定或否定的回答. 这里类别与类别之间相互排斥，一旦划入某一类别，就意味着对其他类别的否定. 为此，提出类别判断的模糊集模型时有两点基本假设：

1. 心理连续量被分成若干类别时，它们的界限是模糊不清的；

2. 在每个类别上都有不同的符合程度.

用数学形式表示为：$\underset{\sim}{g}=\{\mu(\underset{\sim}{x}_i)\,|\,\underset{\sim}{x}_i,\ i\in I\}$，其中$i$是类别数，$\underset{\sim}{x}_i$是划分的类别，$\mu(\underset{\sim}{x}_i)$是待测对象在$\underset{\sim}{x}_i$上的隶属度.

这就是说，将各类别看作是心理连续量上的模糊子集，人们在对每个类别进行判断时并不作绝对的肯定或否定，而只是考虑待测对象对这个类别符合到什么程度. 这种程度可以用[0,1]闭区间的一个实数去度量，这个数便是隶属度. 此时，类别与类别之间是相容关系，被试的反应不再是量表中的一个点，而是隶属度的集合$\underset{\sim}{g}$，对这类值进行统计被称为模糊统计.

这种模型既适用于连续物理量的心理划分（如重量、高度等），也适用于语言类别的划分（如好、厌等）.

基于这一模型，可以产生各种具体的测量方法，这里介绍一种多级估量法.

所谓多级估量法是指被试就待测对象在量表的各个类别上作出估量. 仍以前面辨认字形的试验为例. 首先在心理连续量上划分出五个类别，如表3所示，然后对所写字形与"日"字的相象程度进行估量，即从表中的五个类别中挑选出符合程度最高的类别，并表明肯定度，接着在与这个类别相邻的两个类别上作对偶比较以确定赞同或反对的肯定度，直至完毕.

此类操作具有如下性质：1)一旦确定完全肯定的类别，必有某个或某些类别是完全否定；2)愈远离峰值，其量值愈小；3)只有单峰；4)待测物体特点愈不明显，在各类别之间反应程度的差别也愈小.

用类别判断的模糊集模型较之用传统的类别量表能够获得更全面的信息，更符合于类别判断的性质，能够比较完整细致地揭示出心理变化的全貌，同时提高了测量的可靠性.

基于记忆的模糊推理

基于记忆的推理是决策的重要基础，而前

表 3　字形"⊟"($L_1/L_2=0.95$)被确认为"日"字的多级估量

		很象	比较象	中立	不怎么象	很不象
赞同	坚决					✓
	基本					
	少许				✓	
反对	少许					
	基本			✓		
	坚决	✓	✓			

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

者又是以记忆和信息相互作用为前提的．其中的关系可以由图4来说明．

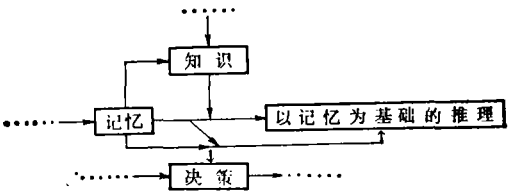


图4　记忆与推理的关系

那末，记忆和信息量是如何作用才产生了以记忆为基础的推理的呢？现在就以下面的实验为基础来说明这个问题．

实验的材料是扑克牌．它有7种预先排列好的规则．实验按以下步骤进行：

1．实验者按其中的一种排法将牌覆盖起来．

2．实验者要求被试说出一张牌的名称．

3．被试每次只能说一次，并告诉实验者对这张牌的肯定度．然后翻开这张牌．这里肯定度取值于[0，1]闭区间．

4．实验者按照表4的格式填写相应的项目．

表4　实验表格

实 验 顺 序	
实验者排列的牌 被试择牌的肯定度 被试择牌的正误	

5．重复步骤2，3，4，直至被试能够正确说出牌的名称，且其肯定度为1为止．

试验在两种条件下进行．1)保持翻开的牌不变；2)翻开的牌立即又被翻回去（两次试验相隔两个多星期）．

在第一种条件下，被试只需根据已翻开的牌的信息作出推理，而在第二种条件下，推理的依据不仅仅是牌所提供的信息，还取决于被试对已翻开牌的记忆程度．

以模糊熵P作为对信息量的度量，即：

$$P=-K\sum_{j=1}^{N}\{f(x_j)\mathrm{lr}f(x_j)+\bar{f}(x_j)\ln\bar{f}(x_j)\},$$

其中$f(x_j)$是事件x_j的肯定度，K是正常数，$\bar{f}=1-f$.

在第一种条件下，从第1次到第$j-1$次试验时翻开的牌的信息量P^{I}_{j-1}为：

$$P^{\mathrm{I}}_{j-1}=-\frac{1}{N^{\mathrm{I}}}\sum_{l=1}^{j-1}\{f^{\mathrm{I}}(x_l)\ln f^{\mathrm{I}}(x_l)+\bar{f}^{\mathrm{I}}(x_l)\ln\bar{f}^{\mathrm{I}}(x_l)\},$$

其中N^{I}是被试在完全找到排列规则之前所翻牌的数目，x_l是第l次翻开的那张牌．

由于推理结果f^{I}是依据可利用的信息量得来的，所以对第j张牌的推理度r^{I}_j为：

$$r^{\mathrm{I}}_j=f^{\mathrm{I}}_j-P^{\mathrm{I}}_{j-1},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N^{\mathrm{I}}.$$

在整个试验中的推理量r^{I}为：

$$r^{\mathrm{I}}=\sum_{j=1}^{N^{\mathrm{I}}}r_j\Delta_j.$$

在第二种条件下，从第1次到第$j-1$次试验时翻开牌的信息量P^{II}_{j-1}为：

$$P^{\mathrm{II}}_{j-1}=-\frac{1}{N^{\mathrm{II}}}\sum_{l=1}^{j-1}\{f(x_l)\ln f(x_l)+\bar{f}(x_l)\ln\bar{f}(x_l)\}.$$

因为在这种条件下，必须记住翻开过的牌才能推断出排列规则，所以在排列规则相同时，第二种条件下的肯定度与第一种条件下的肯定度必然有一定的差异，这种差异是由记忆导致的．

以q_i作为记忆对第i张牌作用程度的度量：

$$q_i\doteq\begin{cases}f^{\mathrm{I}}_i-f^{\mathrm{II}}_i, & f^{\mathrm{I}}_i-f^{\mathrm{II}}_i\geqslant 0,\\ 0, & f^{\mathrm{I}}_i-f^{\mathrm{II}}_i<0,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,\ N^{\mathrm{II}}.$$

在整个试验过程中，记忆对推理的作用量为：

$$q=\sum_{i=1}^{N^{\mathrm{II}}}q_i\Delta_i,$$

对第i张牌的推理度为：

$$r^{\mathrm{II}}_j=f^{\mathrm{II}}_j-P^{\mathrm{II}}_{j-1}-q_j.$$

在整个试验中的推理量为：

$$r^{\mathrm{II}}=\sum_{j=1}^{N^{\mathrm{II}}}r^{\mathrm{II}}_j\Delta_j=\sum_{j=1}^{N^{\mathrm{II}}}(f^{\mathrm{II}}_j-P^{\mathrm{II}}_{j-1}-q_j)\Delta_j.$$

以上简要地介绍了数学在心理学中的一些应用．随着心理学和数学的不断发展，数学必将越来越深入地渗透到心理学的研究中来．

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net