促进儿童数学思维发展，提高小学生教育素质

张梅玲

（中国科学院心理研究所）

【摘要】数学思维主要包括数和形的概括和推理能力以及可逆、互补、补偿、相对、关联、对应、转换等思考方法。笔者认为这种思维是二十一世纪人才的重要素质之一。自八十年代初期起，我们在小学数学教改实践中探索促进儿童数学思维发展的条件。实验结果初步表明：组织合理的知识结构，寓辩证思维于形象教学，加强思考性训练，促使儿童主动建构知识，是有利于儿童数学思维发展的。

全面提高小学生的教育素质是培养二十一世纪建设人才的需要。对儿童数学思维的训练和培养是提高小学生教育素质的一个重要方面。

数学思维主要包括数和形的概括和推理能力以及可逆、互补、补偿、相对、关联、对应、转换等思考方法。

我们研究小组提出，以“1”为基础标准揭示数和数学中的部分与整体关系，来重新建构现行小学数学的内容。近十年来的教改实践和心理学测查材料初步表明：组织合理的知识结构；寓辩证思维于形象教学；加强思考性训练；促使儿童主动建构知识，是有利于促进儿童数学思维的发展的[1][2][3]。

组织合理的知识结构

一个合理的知识结构，既要遵循知识本身的逻辑性，又要符合儿童的认知规律。

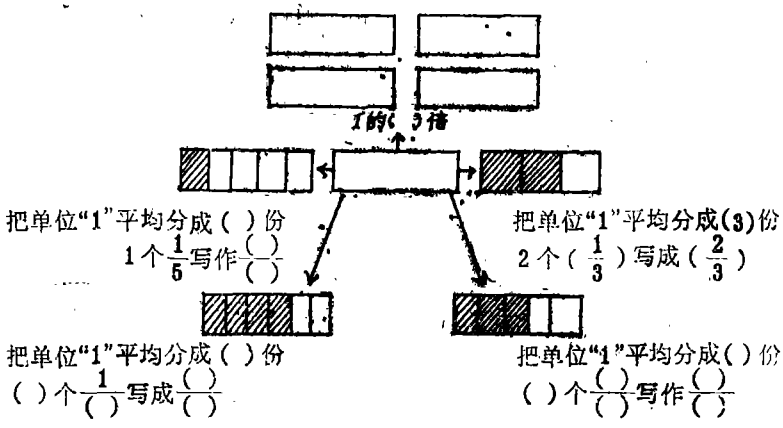
数学知识结构，大致有梯级结构和网络结构这两种类型。前者是一种有序系统，系统中的知识呈现是由低到高、由简单到复杂的顺序排列。后者则是一个由知识点、知识链构成的纵横交叉的多维的知识体系。知识点是指知识的基本单位，如基本概念、基本原理。知识链表示知识之间的相互关系。掌握知识链的着重点在于揭示诸知识之间的内在联系。诸多纵横交叉的知识链有机地构成知识网。掌握了知识网，就能从整体上把握知识的体系，这有利于促进学生的数学思维。实验教材* 的知识结构是以网络结构为主，结合梯级结构建构起来的。具体来说，实验教材主要是通过把握住儿童对单位“1”的认识和整体守恒能力这两个数学中部分与整体关系中最核心的概念来构建的。这就使知识结构中的基本思想和原理更具有概括性。因为部分与整体关系是数学概念和运算内容的一种本质的内在联系。有些作者[4]认为，儿童发现整体的不变性是他们掌握数量化过程中的一个重要环节。我们所提出的部

*实验教材为《现代小学数学》，由中国科学院心理研究所《现代小学数学》实验领导小组编写，主编为刘静和。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

分与整体，指代表整体和整体中的部分的基数。整体包含部分，部分被包含于整体，这是部分与整体的关系之一。这种包含与被包含的关系决定了整体可分解为部分，部分能合并为整体。这种部分与整体的分与合，是思维的分析综合活动的客观基础。整体大于部分，部分小于整体，这是部分与整体关系中的又一关系。在小学数学中，部分与整体的比较活动由个数的比差到倍数的比倍，由整数的比较到分数的比较，由比较两数的倍数大小到比较两数的比值（用统一的标准量）大小，比较部分与整体的这一认识发展过程，沟通了整数——分数——比值之间的层次过渡，体现了知识的整体性和层次性。以“1”为基础标准的含义包括两个方面：其一、从整数发展到分数，进而用一般（分数）说明个别（整数）。从“1”的可积性（积“1”为正整数），认识正整数计数单位的唯一性，在动态中认识自然数的基数和序数的双重意义；从“1”的可分性（分“1”为分数）认识分数计数单位的多样性，在动态中认识分数的意义，把小数、百分数作为分数的特例。其二，从具体量发展到抽象数。“1”最初作为比较自然数大小的单位，即1只包括一个元素；以后发展为每份数、一倍数、分数单位、分数应用题与比例应用题的假设“单位1”或“整体1”等等。它的概括性可以在不同范围内、不同程度上加以使用。而这种概括了的基本思想和原理，在纵横联系的知识网络中具有更强的生命力。例如在分数概念的学习中，教材的构建既要注意新、旧知识的共同基础，又要注意新知识相对于旧知识来说起质变的那个部分。构建教材的基本要求是使“自然数”和“分数”均以“1”为基础，即自然数是“1”的积累，分数是对“1”的均分。因此，我们在教材中设计安排了这样一个例题（见《现代小学数学》第七册，第118页）：学生通过积“1”和分“1”的学习，可以初步建立分数概念，同时可以扩大数概念的范围。

看看下图中的阴影部分是几分之几



教材的构建还要考虑到儿童自身认知发展的规律。我们的研究表明[5]，儿童对部分与整体关系的认识有其开始、持续和终结三个段落以及四个层次（数量关系、包含关系、互补可逆关系和补偿关系）。在发展过程中，儿童对不同的认识对象有其年龄阶段的特征。儿童对部分与整体关系的认识是从数量关系开始，到补偿关系终结的。实验材料表明，5岁半左右的儿童能做到把整体分为两个或两个以上的部分，但要把部分合起来，还原到原来的整体，就觉得困难。分比较容易、合比较困难的主要问题在于儿童缺乏思维的可逆性。因此，实验教材基本上是以整体形式把数和形中具有可逆性内在联系的概念呈现给儿童的，以利于儿童通过知识的转化来塑造一个较好的数学认知结构。在心理学测查中，从儿童解决问题的策略上我们也可以初步看出，实验教材的知识结构确实有利于儿童塑造一个良好的认知结构。例如在一次对儿童对数量相差关系的建构的测查中，主试要求儿童设法使二行相等的棋子（每行各4个棋子）相差2。解决这个问题，儿童可以从外面盒中取二个棋子加在一行

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

上，使二行分别成为6和4；也可以从一行棋子中取走2个，从而得出4和2；也可以从一行棋子中取出一个移到另一行棋子中，使二行分别为5和3。这三种策略都可以使原来相等的二行棋子相差2。但从策略水平上讲，前二者仅仅甲从一行中加2或减2这种办法来使二行棋子相差2，皮亚杰把这种策略称为绝对的加、减法[6]。而儿童采用移动策略，则标志着儿童在思维上实现了一个跃进，因为从一行中移走一个棋子，这本身就蕴含着另一行增加一个。按照皮亚杰的说法，这说明儿童具有了相对加、减的概念，也就是在数量关系上有了可逆、互补等思考方法。对这题的测查结果是：实验班有54%的学生能采用移动策略。而对比班只有30%的学生采用这种策略。1988年，为了考查学生在改编应用题中的可逆性思考能力，我们让学生先书面解决这样一道应用题（有20个白皮球，红皮球比白皮球多5个，红、白皮球一共多少个？）学生解答后，再让他们把此题的一个条件作为问题，把题中的问题作为一个条件来改编这道应用题。三年级实验班有91%的学生能正确解原题，有47%的学生能正确改编这道题，而同年级的对比班73%的学生能正确解原题，但能改编题的只占3%。比实验班高一年级的四年级对比班学生能正确解原题的占89%，能正确改变此题的也只占11%。由此可见，实验班和对比班在改编题上的差异比解原题的差异要大得多。实验班学生在应用题的问题和条件的可逆思考方面，能力不仅明显地优于同年级对比班，而且也高于高一年级的学生。在1987年的测查中，有这样一道题（要求学生把3＋4＋5＋6＋7＋8＋9这个加法算式改写为乘法算式）。实验班有70%的学生正确解答，对比班只有10%的学生能解决这个问题。在策略上，对比班5名做对的学生自述的思考过程均为："我把这七个数加起来是42，我再想几和几相乘得42，一想是6×7等于42，所以这题可以写成6×7。"而实验班学生没有一个人采用这种策略，他们有的说："我从9中取出3个给3，从而合成两个6；从8中取出2个给4，也得出二个6，再从7中取出1给5，这样就有了6个6，再加原来一个6，就成7个6，所以可以写成6×7。"有的则先做3＋9＝12、4＋8＝12、5＋7＝12，再写成12×3＋6或6×7。总之，实验班学生在实验教材力求使实验班学生按这样一种知识结构进行学习。从一系列有关的临床测查结果可以初步看出，实验班学生的可逆性、互补性、相对性等数学思维能力均高于同年级学生，在有些测查中还高于高一年级学生的水平。由此可见，组织一个合理的知识结构，确实直接影响到塑造学生的认知结构，从而也影响到学生在问题解决中对策略的选择。

寓辩证思维于形象教学

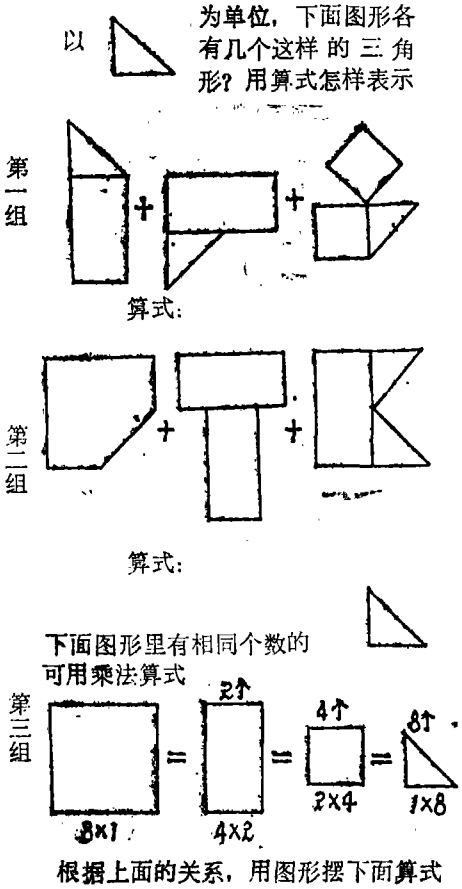
辩证逻辑思维是人脑对客观事物本质属性的反映。它要求从运动、变化和发展的观点去处理这一思维形式中的具体问题，它是个体思维发展的高级阶段。无疑，辩证地思考客观世界中的数和形的各种关系，是数学思维中的主要成分。教学是进行教育的一条基本途径，而教材又是教学过程中的主要因素。我们根据小学数学的知识内容和儿童认知的特点，在十册教材中分别编写了一与多、分与合、相等与不等、分解与组合、变与不变、有限与无限、平行与不平行、精确与近似、具体与抽象、常量与变量等十对对立统一的矛盾。这一方面为新知识的引入作认知上的准备，另一方面可以使儿童通过数学知识的学习，在培养初步逻辑思维的同时，萌发辩证思维，也就是说，使小学生在小学数学知识的学习中受到一些辩证思维的启蒙教育。小学生的思维以具体形象思维为主导形式，所以在对小学生进行辩证思维的启蒙性教育时，所选择的内容应该是为这个年龄阶段的儿童能接受的，所运用的形式应该以儿

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

童操作为主，让儿童在动手分一分、合一合，摆一摆中想一想，算一算。也就是说，要通过生动形象的教学来进行辩证思维的启蒙教育。例如第一册中的“一与多”，教材的建构首先是个体为1，群体为计量单位（个、盘、筐、堆等）。这些计量存在于儿童的日常生活之中，是为儿童所熟悉的，所以是他们所能接受的。在这具体形象的基础上，再转入个体仍是1，但群体为计量单位（个、十、百）的计算。又如第三册中的“相等与不等”，教材从儿童在日常生活中所熟悉的东西的长短、大小、轻重这三个方面进行比较，使儿童从生动、形象的比较中初步体会到相等是相对的、有条件的，不等是绝对的；不等的数量中有相等的部分，相等的数量中有不等的成分，两者是可变的，是相比较而存在的这些辩证地思考问题的方法。

加强思考性训练

数学思维是一种特殊的能力。它需要在学生数学知识的学习过程中有意识、有目的地进行训练。实验教材的构建一方面注意了基本知识的思考性训练，另一方面注意在知识学习的一定段落对学生进行专项思维（如推理、概括、空间、知觉等）训练。几年来的教学实践表明，这种训练不仅为学生所喜欢，而且有利于学生数学思维的发展。学生学习数学，一般来说，要经历一个纵向归纳、演绎、横向类比、逆向转换的学习过程。因此在练习的设计上，应注意知识之间不同方向的联系，也就是要注意练习的呈现的系列化、内容的层次性、方法的多样化。对数学知识中的基本知识和技能，要有基本训练系列、横向训练系列、纵向训练系列。在训练中要注意对小学生常用数学思维(如比较、对应、类比、假设、转换等)方法的训练。尤其是转换性训练，可以说是数学思维能力训练的中心环节。在实验教材的编写中，一方面在已知和未知之间安排了扩缩性、可逆性和情节性这三种形态的转换；另一方面也比较注意数与形之间的转换性练习。如在学习了乘法口诀后，有这样一道练习（见《现代小学数学》第二册，第117页）：



这三组题主要是通过看图形列算式使学生更好地理解乘法的意义，同时培养学生的空间想象能力。第一组题虽然每一个图形的形状各不相同，但是它们包含的小三角形的单位相等，因此可以列出5×3。第二组图形的三个部分图形所含的基本单位数不相等，这三个图形的算式为7＋8＋6，然后再引导学生找三个图的单位数之间有什么关系（8比7多1，6比7少1），启发学生能不能想个办法，也使这组图形能用乘法算式来表示，即移多补少，从8里拿出一个单位给6，这样三个图形所含的单位数都相等而可写成7×3，并在讨论中得出下面的算式：

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

7＋(8－1)＋(6＋1)＝7×3。要解第三组题，学生首先要搞清楚图形之间的关系，把第一个正方形分成上面的小三角形，分成8个，用算式可表示为8×1；把它分成长方形，分成2个，每个含4个小三角形，算式就是4×2；如果把它分成1个三角形，就可分成8个。学生通过摆一摆这种操作会懂得1个8可以用2个4来表示，也可以用4个2来表示，还可以用8个1来表示。这样一种形与数、数与形之间转换性的训练，不仅有利于学生加深对乘法意义的理解，而且有助于他们理解一个整体的两部分之间的补偿关系（即4×2＝2×4）。

促使儿童主动建构知识

在教学中是让儿童被动地接受现成的结论，还是促使儿童主动地建构知识，这是两种对立的教学方法。皮亚杰曾指出："全部数学都可以按照结构的建构来考虑"[6]在教学中如何促使儿童主动地建构知识呢？

一、建立民主、平等、友好、愉快的教学气氛和新型的师生关系

教学过程是师生双边完整的心理活动过程，因此师生双方的心理状态及其关系是否积极，可以直接影响到教学的效益。只有儿童的乐学、爱学、肯学、会学，才能使他们主动地建构知识。因此，教师必须尊重每个学生，给予每个学生以真诚的、强烈的爱和期望。总之，教师要以知识的魅力吸引儿童，以教学的艺术感染儿童，以友好的气氛影响儿童，促使他们主动地塑造良好的认知结构。

二、充分利用表象的作用，促使儿童更好地从生动的直观向抽象的思维转化

感知操作、表象和概念是儿童认知活动中的三种心理成分。它们在儿童的认知活动中是相互联系、相互制约、相互调节、相互消长的。数学概念是数学思维中的重要成分。由于其思维的具体性，儿童学习抽象的数学概念是有一定困难的。因此在教学中，尤其是低年级儿童的数学学习中，要加强感知操作成分，充分发挥表象的作用，来促进儿童对数学概念的理解和掌握。感知操作是一种最易为儿童所把握的活动形式。表象是儿童思维从具体过渡到抽象的中间环节，它可以使思维活动摆脱对实际操作的依赖，并为概念的形成提供坚实的基础。

三、知识的坡度，提取知识的线索，要做到因材施教

儿童对任何一种新知的学习，均是旧知在原有认知结构基础上的扩大和改组。因此在儿童对知识的建构过程中，由已知到新知的转化是学习过程中的中心环节。在这个转化过程中，教师要根据每个学生原有的认知结构，为每个学生提供适当的知识坡度和必要的线索，以便每个学生能更快更好地根据教师所提供的线索，从长时记忆仓库中提取理解新知所需要的知识，积极地建构新的知识，进而促进其数学思维的发展。

儿童数学思维的发展是有其发生、发展的阶段的，而且是受多方面因素的影响的。因此，教育者应有计划、有步骤地发挥各种因素的系统的能动作用，以利于更好地促进儿童数学思维的发展，提高小学教育素质。

参考文献

（1）何纪全：关于儿童对部分与整体关系认知发展的研究、6—7岁儿童用非除法运算解答包含除法的实验，心理学报，1982年，第1期。

（下转第62页）

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

本刊召开华东地区、上海市编委及编辑人员工作会议

1989年4月10、11日于华东师范大学召开本刊华东地区、上海市编委及编辑人员工作会议，与会者19人。

10日上午，李伯黍副主编主持会议。华东师大副校长及心理系领导到会并讲了话，他们反复强调，在当今深化改革的新形势下，心理科学应该得到充分的重视，而心理学的专业刊物也应该作出新的贡献。中国心理学会副理事长张厚粲教授也应邀参加会议，她肯定了《心理科学通讯》多年来所取得的成绩，指出它是一种深受专业人员、有关的实际工作者以及许多心理学爱好者欢迎的读物，鼓励我们坚持改革，克服暂时的困难，努力办好刊物，使心理学更好地为社会服务。本刊的主办单位中国心理学会致信祝贺会议的召开并慰问为刊物辛勤工作的编辑人员。

朱曼殊主编在工作报告中指出，这次召开编委会议主要有三个目的：一是在当前深化改革的新形势下，我们的刊物要以怎样的新姿态和新精神来担负起新的任务，需请编委们共同讨论，统一认识，明确方向；二是汇报几年来刊物出版工作的情况和所存在的问题，请编委们提出改进意见；三是目前面临出版事业的窘境，我们这种自负盈亏的专业刊物更是经受着生死存亡的严峻考验，如何坚持下去，也要请编委们献计献策。

朱曼殊回顾了刊物自1981年复刊以来的情况。党的改革开放政策使屡遭挫折的中国心理学得到了空前的繁荣和发展，本刊是适应这样的形势复刊的。复刊以后，中国科协、中国心理学会、华东师范大学和心理学系两级领导十分关心和支持我们的工作，主办单位为我们确定了明确的办刊宗旨，承办单位在人力、物力上给了极大的支援；全国各地的编委热心为我们供稿，并通过各种渠道对我们鼓励或提出改进工作的意见。另一方面还须提到的是编辑部的全体编辑同志和工作人员同心协力为办好刊物所付出的忘我劳动，他们不计报酬，任劳任怨，甘当无名英雄。基于以上的主客观条件，《心理科学通讯》复刊近九年来，取得了一定的成绩，国内同行对它的评价较好，认为我们基本上贯彻了中国心理学会所确定的办刊宗旨即全国性、学术性、综合性和信息性（通讯性），内容广泛，形式多样，对心理学的科研和教学以及解决一些有关的实际问题颇具启发。

但是，我们的工作还存在着许多问题。首先是稿源问题，虽然来稿不少，但大多数稿件的水平不够理想，淘汰率达70%左右，在已采用的稿件中，能理论联系实际并解决实际问题的更是为数不多。如何扩大稿源，组织有质量的稿子，调动作者投稿的积极性，是有待努力的。其次，如何有计划地组织一些有关心理科学发展的重要问题的讨论以活跃学术气氛，也需要我们去探索。第三，刊物的纸张和印刷质量都很不理想，和兄弟刊物相比有较大差距，这同以下所谈的第四个问题密切相关。第四，刊物出版工作面临着严峻的经济亏损问题，纸张费印刷费猛涨，订户数猛跌，尽管采取了一系列开源节流的措施，仍然举步维艰。朱曼殊在报告最后说，希望通过这次编委会议，发挥集体智慧，找到一些自助的办法，坚持办下去，把刊物办得更有活力。

10日下午起，在方芸秋副主编主持下，编委与编辑人员进行了热烈的讨论。他们提出，编辑部要适当进行组稿，开辟新栏目，多发表一些联系实际的应用性文章，以争取更多的读者，但也不能降低刊物的学术水平。他们还想了许多具体的办法，如提高刊物的知名度，开发国内外市场，联系广告，来多方解决经费问题，等等。会场上出现了群策群力的令人振奋的气氛。

这一次会议虽然时间很短，但收获不小，大家对《心理科学通讯》的前景满怀信心，对中国心理科学事业的发展充满希望。

《心理科学通讯》编委会

1989年4月20日

（上接第20页）

（2）张梅玲、王宪钿等：幼儿百以内数概念的形成和发展，心理科学通讯，1983年，第3期。

（3）张梅玲、刘静和等：以“1”为基础标准揭示数和数学中部分和整体关系的系统性教学实验，心理学报，1983年，第4期。

（4）Gruber H.E.and Vonèche J.J., The Essential Piaget, Routledge & Kegan Paul, London, 1977.

（5）刘静和、王宪钿等：儿童在数及数学上对部分与整体认识的发展，心理学报，1982年第3期。

（6）Piaget, J., The principles of genetic epistemology, London, Routledge & Kegan Paul, 1972.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

English Abstracts

An Experimental Study of Tactile Hyperacuity: II Curvature Perception

Wang Su, Zhang Ming
(Department of Psychology, Beijing University)

In the experiment of curvature perception, three conditions were used. Two of them allowed the stimuli to move across the surface of the index finger pad with either slow (about 20mm/sec.) or fast(about 50mm/sec.) speed, while the finger remained immobile; the third, a control one, allowed both the finger and the stimuli no mobility. Five lengths of curves were used (10, 14, 18, 22 and 16mm measured by the arc's chord). For each length, there was a set of curves with arc's height ranged from 0 to 3.5mm with step of 0.5mm. Six subjects were tested by a two-response forced-choice version of the method of constant stimuli. The threshold was defined as the stimulus value (arc's height in mm) which gave rise to 75% correct "curve" responding. The basic findings were as follows: 1. the mean thresholds of curvature perception from the three conditions for the five lengths were ranged from 0.549 to 1.400mm increasingly with the curve length; 2. the mean thresholds from the five curves for the three conditions were 0.771mm (fast speed). 1.002mm (slow speed) and 0.998mm (contiol). The threshold at fast speed was significantly lower than those at slow speed and with-out mobility, but there was no significant difference between the last two.

An Experimental Study of Memory Material Factors in Rehearsal Effect

Qin Jianjian
(East China Normal University)

This paper assumes that rehearsal effect varies with the semantic nature of the memory material. Incidental learning paradigm and orienting tasks were used to control the type of rehearsal in five experiments to exam this assumption. The results show that different semantic natures of the memory material result in different patterns of recall under free recall condition. Nevertheless, the semantic nature only affects the rehearsal effect at the semantic level, under recognition condition. The paper puts forward that memory trace is characterized by the dual feature of elaborativeness and divergence, recall extraction being related with the former and recognition the latter. Current data about rehearsal effect can be reasonably interpreted in the framework of the processing depth theory.

Promoting the Development of Children's Mathematical Thinking, Raising Pupils' Educational

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

disposition

Zhang Meiling
(The Institute of Psychology)

Mathematical thinking mainly includes the generalization of the number and the figure, the competence in inferences and thinking methods such as the reversibility, complementarity, compensation, relativity, associability, correspondence and transformation. The author holds that mathematical thinking is one of the important qualities required of talented people of the 21st century. Since the beginning of the eighties, we have explored the conditions for promoting the development of children's mathematical thinking in our teaching experiments in primary schools. The results of our experiments show that a rationally organized knowledge structure, the implanting of dialectical thinking in imaginal teaching, the enhancement of thinking training, and the promotion of children's active construction of knowledge are coducinve to the development of children's mathematical thinking.

Research on the Learning Ability of Graduating Pupils of Special Schools for the Retarded

Tang Shengqin, Zhang Fujuan
(Psychology Department, East China Normal University)
Luo Bowei
(Hangzhou Education College)

This research investigated 32 retarded children who had studied in full-time specials chools for the retarded for nine years and finished all the ten Chinese and Mathematics textbooks which are compiled for general primary schools. The results of Chinese word recognition tests and the tests of knowledge of Chinese and Mathematics show that the mildly retarded can recognize and read 2600 words on the average, approaching the level of Grade Five pupils' in general primary schools. Their Chinese and Mathematic performances come colse to the levels of fourth-and third-graders' respectively. In addition, the merits and demerits of using general Chinese and Mathematics textbooks in retarded schools are also discussed in this report.

The Reaction Time in Stroke Patients

Wang Xiaoming, Chen Weihua
(Beijing Institute of Neurosurgery)
Xu Shulian
(Institute of Psychology, Academia Sinica)

Simple reaction time (SRT) and choice reaction time (CRT) were examined in 79 patients of cerebral hemorrhage. The results indicated that the SRT and CRT of the patients were significantly longer than those of the control group, the coefficient variability of SRT of patients were greater than those of the control groups at the same time. Performance of the patients of left-side lesion was not different from that the patients of right-side lesion. The SRT and CRT were also poor in the patients of basal ganglia lesion. There was a tendency of positive correlation between the length of SRT and the size of brain damage.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net