

4-5年级学生的空间表征与几何能力的相关性研究^{*1)}

徐凡 施建农

中国科学院心理研究所, 北京, 100012

摘要

本研究是“学生空间能力和几何能力关系”研究的一部分,以小学4、5年级学生为被试(共117人),以空间表征能力测验和几何能力测验为测验工具,初步探讨了学生空间表征与几何能力的关系。对数据分析表明:①就总成绩而言,五年级学生的空间表征成绩明显高于四年级学生的成绩,但并不是空间表征的所有方面都存在着显著的年级差异;②就空间测验的总成绩而言,无论是四、五年级分别考察还是总起来考察,空间成绩与几何成绩之间的相关显著,但就各个分项而言,并不是空间测验的各项都与几何测验成绩有显著相关;学生的几何成绩在一定程度上可通过回归方程: $\bar{Y}_i = 0.5736X_i + 0.7635$ 加以预测。

关键词: 空间表征、空间能力、几何能力、回归方程

一、问题

几何学是数学科学的一个主要分支,它是用数学关系来表现空间的。几何能力是数学能力的一个重要方面,是指学生掌握几何概念(或定理)并运用这些概念(或定理)来解决几何问题的能力。因此,在学校教育、教学中如何提高学生的几何能力、如何提高几何课教学的效果等问题一直是心理学家和教育家们感兴趣的课题。我国的心理学家们在六十年代初作过一系列关于学生几何能力、几何教学等方面的研究。当时的许多研究主要关心是“教材结构、教学方法”等因素对学生学习几何课效果的影响及如何从教材、教法的改革上来促进学生几何能力的发展及提高学校的几何教学效果^[1-4],而很少从儿童空间能力发展的角度来考察儿童的几何能力的研究。

由于历史的原因,许多正统的科学研究被中断了十多年以后,虽然仍有一些学者致力于研究儿童的几何学习能力等问题,但研究的角度仍主要是以如何提高教学效果出发的。而另有一些发展心理学家开始对儿童的空间能力的发展产生了兴趣,并作了一系列的实验研究^[5-11]。

纵观前人的研究,我们发现,无论是在关于学生几何能力(或几何学习)的研究方面,还是在关于儿童空间能力发展的研究方面都取得了很好的结果。但是,有关学生空间能

* 本实验得到国家自然科学基金的资助。

1) 本文于1991年1月14日收到。

力与几何能力的关系的研究却很少见,这不能不说是一件令人遗憾的事。

在国外,早有人提出“空间能力是数学能力的一个基本要素”^[12],而它与几何能力的关系可能更为密切。

我们认为,空间能力包括许多方面。为了使目标明确,我们首先要对学生的空间表征与几何能力的关系作一初步的探讨。这不仅是因为空间表征是空间能力的一个核心部分,而且是因为空间表征涉及到表象的形成及对表象的操作,而能否清楚地形成表象并对表象作自如的操作可能与学生的几何能力有紧密的关系。因此,本研究的目的就在于探索小学儿童(4、5 年级)的空间表征与几何能力之间是否有关系,有什么样的关系,几何能力是否可通过空间表征能力加以预测等问题。

二、研究 方 法

1. 被 试

本研究的被试为小学 4、5 年级学生,共 117 人,其中四年级 65 人(男 39 人,女 26 人,平均年龄为 10.5 岁);五年级 52 人(男、女各 26 人,平均年龄为 11.5 岁)。

2. 测验材料

测验材料是自行编制的几何能力测验 A 卷和 B 卷(简称几何 A 和几何 B)和空间表征测验 I 卷(简称空间 I)。

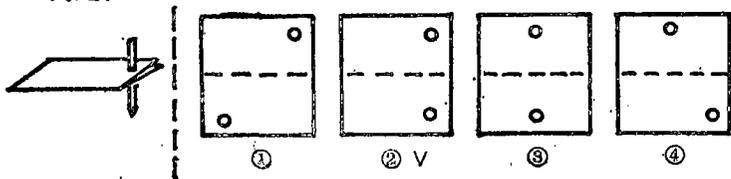
“几何 A”主要包括小学 3—6 年级数学课本中与几何知识的基本概念有关的题,^[13]每年级水平 5 题,共 20 题,满分为 40 分。

“空间 I”主要包括“折纸、箭头折合和展开”三个项目^[14]。折纸和展开各 4 题,箭头折合有 8 题,共 16 题,满分为 16 分。

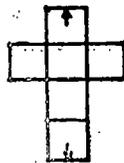
“折纸”考察的是学生形成镜象关系(或对映关系)的能力;“箭头折合”主要考察的是心理折叠的能力;而“展开”考察的是心理展开的能力。测验的指导语和例图如下:

(1) 折纸。如果把一张纸折起来,用铅笔在上面扎个洞,把纸展开后,我们可以看到这张纸上有几个洞。在以下的各题中,左面的图是折起来扎洞的情景,右面的图是 4 张展开的纸,其中有一张与左面那张展开后完全一样,请把这张纸找出来,在它的下面打个对勾“√”。请先看例题。

例题:



例图 1



例图 2

正确答案是②。这张纸折起来后与上面那张洞的位置完全一样(请注意,图中纸内的虚线为折线)。下面开始做题。

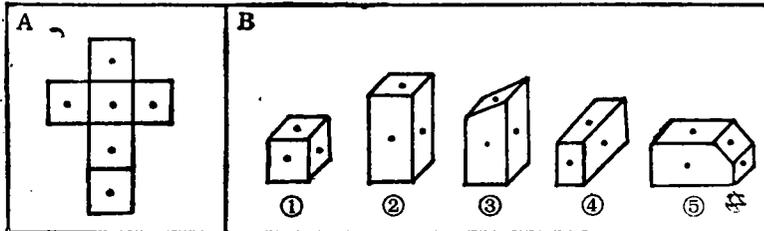
(2) 箭头。下面这些纸如果按线折叠,都可以折成一个方盒子。请你判断一下折成方盒子后,纸上面的小箭头会不会碰到一起。请你在小箭头能碰到一起的图形下面打个

对勾“√”，不能的下面打个“×”。

(3) 展开。

图A上画了6个方格，你要用它来折一个盒子。

图B各盒子中有一个(只有一个)是用左面那张展开的纸折成的，是哪一个？



例图3

从左面的图上我们看到，盒子表面要由6个相等的正方形构成，每个正方形上有一个黑点。这样，答案必定是一个正方体，而且每个面上都有一个黑点。因此正确答案是①。

空间I的三个项目的16道题是根据世界上各种能力(智力)测验中的有关空间能力或空间表征的测验题按本研究的目的精选或改编而成，因此，原则上使空间I中的每一题都包含于空间表征的范畴之内。在解决了空间I的这个关键问题之后，余下的有关该测验的另一个问题是，组成空间I测验的三个项目能否代表空间表征的三个方面呢？在进一步研究以前，先要解决这个问题。为此，我们又作了因素分析(见表1)，并分析了学生三个项目各自得分与空间I总分的相关(见表2)。从表1的结果可以看出，折纸、箭头

表1 空间I的三个项目在不同因素上的负荷量

	FACTOR1	FACTOR2	FACTOR3
折 纸	0.993209	0.019272	0.114733
箭 头	0.112850	0.067820	0.991295
展 开	0.022018	0.997866	0.061476

表2 空间I的三个项目的得分与总分的相关

年 级	四 年 级	五 年 级	总 体
折 纸	0.543***	0.351*	0.473***
箭 头	0.883***	0.867***	0.881***
展 开	0.428**	0.512**	0.450***
人 数	65	52	117

* $P < 0.05$, ** $P < 0.01$, *** $P < 0.001$ (下同)。

和展开三个项目分别负载于三个因素，而表2的结果表明，无论四、五年级分开考虑，还是总起来考虑，三个项目都与总成绩有显著相关。这些数据表明，测验的三个项目都对总分作显著的贡献，而相互之间却相对独立，这说明该测验具有较高的结构效度，因此，测验的结果是有效的。

3. 测验程序

第一次测验,四、五年级学生各分成两组,一组先做空间 I 后做几何 A,另一组相反。两个测验共 60 分钟,一次完成。

第二次测验,所有的被试都做几何 B,测验时间 40 分钟。

三、结 果

1. 测验成绩的年级间比较

(1) 平均成绩的比较。从这两个年级的测验结果来看,就总体而言,五年级不仅在几何测验的平均成绩上显著地高于四年级学生,而且在空间测验上的平均成绩也高于四年级(见表 3),其中空中为折纸、箭头和展开的总平均成绩。但并不是空间成绩的所有方面都有同样的差异,“箭头”的差异极为显著($P < 0.01$),而另外两项差异很小。

表 3 四、五年级学生各项成绩的比较

年 级		折 纸	箭 头	展 开	空 总	几 何 A
四	M	2.77	2.31	1.63	6.60	3.12
	S	0.91	2.31	1.35	3.28	2.41
五	M	2.96	3.42	1.62	8.00	7.15
	S	0.85	2.46	1.27	3.08	3.62
t		1.181	2.504	-0.062	2.338	7.161
P		>0.05	<0.01	>0.05	<0.05	<0.001

(2) 得分的分布情况。两个年级在空间 I 和几何 A 上的得分分布情况见图 1 和图 2。从图 1 和图 2 可见,在空间测验上的得分人数基本上是中间多两头少,但在几何测验上的得分,虽然满分是 40 分,但绝大多数的得分都在 16 分以下,尤其是四年级,几何测验的得分都很低。

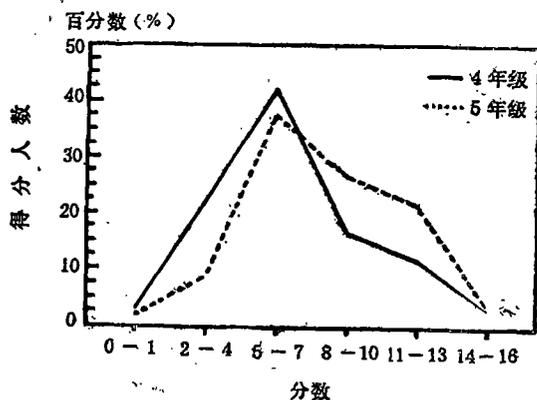


图 1 空间测验成绩分布

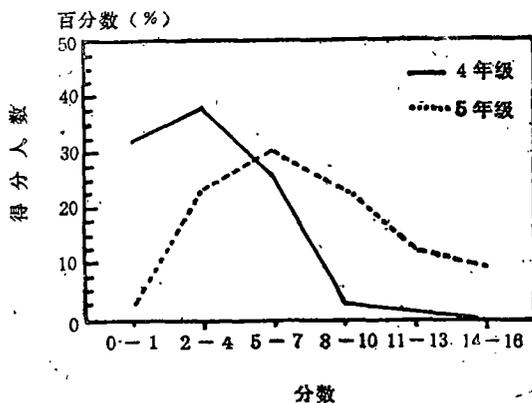


图 2 几何测验成绩分布

2. 空间成绩与几何成绩的关系

(1) 空间 I 与几何 A 之间的相关。空间 I 及三个分项的成绩与几何测验之间的相关列于表 4。从表 4 可见,就空间 I 的总成绩而言,四、五年级及总体的空间成绩都与几何

表 4 空间成绩与几何成绩的相关

年 级	四 年 级	五 年 级	总 体
折 纸	0.310*	0.148	0.240*
箭 头	0.591***	0.361**	0.495***
展 开	0.153	0.211	0.146
总 分	0.604***	0.417**	0.517***

成绩有显著相关,但就空间测验的各分项而言,箭头与几何成绩之间有显著相关,四年级的折纸与几何成绩有显著相关,但五年级的折纸与几何成绩的相关不显著。

(2) 空间成绩与几何成绩关系的分析。据图 1 和图 2 所示,如果以 1:3:1 的比例(即 20%、60%、20%)来划分低分段、中分段和高分段的话,那么,对于四年级学生来说,空间测验得分的分段情况是:低分(0—3)、中分(4—10)和高分(11—16),几何测验的分段情况是:低分(0)、中分(1—5)和高分(6分以上);对于五年级来说,空间测验是:低分(0—5)、中分(6—10)和高分(11—16);几何测验是:低分(0—3)、中分(4—11)和高分(12分以上)。为了进一步分析空间测验的成绩与几何成绩之间的关系,我们从所有四、五年级的学生中分别抽取空间成绩最好和最差、几何成绩最好和最差的学生(分属于高分段和低分段)各 10 名*,分析了这些学生的空间成绩与几何成绩之间的关系(见表 5 和表 6)。

表 5 空间成绩最好和最差学生的几何成绩分布

年 级	空间成绩	几何成绩		
		低	中	高
4	最好(10人)	0(0%)	4(40%)	6(60%)
	最差(9人)	4(44%)	5(56%)	0(0%)
5	最好(10人)	0(0%)	4(40%)	6(60%)
	最差(10人)	4(40%)	6(60%)	0(0%)

表 6 几何成绩最好和最差学生的空间成绩分布

年 级	几何成绩	空间成绩		
		低	中	高
4	最好(9人)	0(0%)	3(33%)	6(67%)
	最差(10人)	4(40%)	6(60%)	0(0%)
5	最好(11人)	0(0%)	4(36%)	7(64%)
	最差(10人)	4(40%)	6(60%)	0(0%)

从表 5 和表 6 的数据可以看出,无论是四年级还是五年级,空间成绩最好的学生几何

* 由于在实际的成绩分布中一分之差会出入许多人,因此在实际的数据处理时有的取了前 9 名有的取了前 11 名。

成绩大多数(60%)在高分段,其余的(40%)都在中分段。同样,几何成绩最好的学生其空间成绩也大多数在高分段(四年级 67%、五年级 64%),其余的都在中分段,没有在低分段的,而空间成绩或几何成绩最差的学生,其相应的另一项的成绩都在中分段(约 60%)和低分段(约 40%),没有出现在高分段的。

(3) 空间成绩与几何成绩的定量关系。根据上述测验结果,我们可以得出这样一个回归方程: $\hat{Y}_i = 0.5736X_i + 0.7635$, 式中 X_i 为第 i 个被试的空间成绩, Y_i 为对应于 X_i 的几何成绩的预测值(predicted value)。假设现有实际观察值(observed value) Φ_i 。如果有 $Y_i = \Phi_i (i = 1, 2, 3, \dots, 117)$, 那么, 回归方程: $Y_i = 0.5736X_i + 0.7635$ 是个理想方程。但心理学研究中 $Y_i = \Phi_i$ 的现象是难以出现的。因此, Y_i 与 Φ_i 的一致程度(或相关程度)就成了检验回归方程好坏的指标。 Y_i 与 Φ_i 的相关程度大, 则方程的预测性高, 相关程度小, 则预测性低。

为了检验上述回归方程的预测性,我们对所有被试作了第二次几何能力测验(简称几何 B)。几何 A 和几何 B 的相关为 $r_{AB} = 0.6941 (F(1, 115) = 106.94, P < 0.001)$ 。第二次几何测验的平均成绩为 4.39, 标准差为 2.89。按回归方程: $Y_i = 0.5736X_i + 0.7635$ 得出从预测值 Y_i 与观察值 Φ_i (第二次测验值)有显著相关, 其相关系数 $r_{Y\Phi} = 0.420 (F(1, 115) = 26.09, P < 0.001)$ 。这说明该方程对几何成绩有较好的预测性。

四、分析和讨论

对于几何成绩,五年级高于四年级是理所当然的,因为几何测验中的有些内容四年级尚未学到。但空间测验中,尽管总体的平均成绩是五年级高于四年级,但该测验的三个项目中有两个(折纸和展开)四、五年级之间在统计上无显著差异,在箭头这一项上四、五年级间有显著差异,这表明空间能力的不同方面发展的速度和时间是不一致的。

从测验的结果我们不难发现,这两个年级的几何成绩都明显地偏低。这是因为,测验题涉及到从三年级到六年级的几何内容,但我们的被试只上到五年级,而且,测验是在新学年开始不久进行的,也就是说,在学生还没有学习几何课新内容之前做的,这就意味着这里的四年级学生实际上只学完了三年级的几何知识,五年级也只学完了三、四年级的几何知识,因此,本研究中四、五年级学生的几何成绩普遍偏低。但是,四年级有这么学生得 0 分是我们始料未及的。这是否由于几何测验太难呢?我们对测验题的分析表明,不是由于测验太难,因为几何测验的内容都是教科书上的基本知识,只要求学生基本的几何能力,因此,究竟是何原因使这么多学生的几何成绩得 0 分,有待进一步探讨。

从表 4—表 6 的结果来看,空间成绩与几何成绩之间的关系是密切的,从研究的结果可以看出,空间成绩最好的学生,其几何成绩不会最差,而空间成绩最差的学生几何成绩不会最好;同样,几何成绩最好的学生的空间成绩也不会最差,几何成绩最差的学生空间成绩不会最好。另外,当我们分别取高于或低于平均成绩两个标准差的四、五年级空间最好和最差的及几何最好和最差的两名学生做进一步分析时,我们发现几何成绩最好的学生空间成绩也最好,几何成绩最差的学生空间成绩不一定最差。相反,空间成绩最好时几何成绩不一定最好,而空间成绩最差时,几何成绩也最差。这一切,都使我们更有理

由推测,空间表征能力是几何学习的一种基础。然而,由于几何学习还受其他许多因素如学习兴趣、动机、学习技巧和教学条件等的影响,因此,仅有较高的空间表征能力并不能保证几何成绩就一定好。但空间表征能力的不足,对学好几何会造成困难。当然,要证实这一点,还需要进一步的控制实验才能实现。

从回归方程对几何成绩的预测结果来看,学生的几何成绩在一定程度上是可以根据其空间表征的成绩作出预测。但是,由于学生的几何成绩的好坏受其他许多因素的影响,这就会造成从空间表征成绩预测几何成绩准确性的下降。

同时,表4的结果使我们注意到,并不是空间表征能力的所有方面都同几何成绩有显著相关,其中,箭头这一项与几何成绩的相关最为显著,进一步证实了空间表征的不同方面与几何成绩的相关不尽一致。并且,相关的显著与否因年级而异。这一点还使我们设想,当进一步证实了空间表征能力与几何能力的关系之后,可以针对不同的年级选择不同的空间表征能力的训练项目,以期通过这方面的训练来促进学生对几何的学习。

五、结 论

作为对空间表征与几何能力的相关性研究的初步探索,从本研究的结果中我们可以得出以下几点:

1. 就总成绩而言,五年级的空间成绩显著地高于四年级,但并不是所有方面都这样。
2. 就空间测验的总成绩而言,无论是四、五年级分开考察还是总起来考察,空间成绩与几何成绩之间存在着显著相关,但就各个分项而言,并不是空间测验的各项都与几何成绩有显著相关。
3. 从这一研究中我们发现,空间成绩高,几何成绩不低;空间成绩低,几何成绩不高;或几何成绩高,空间成绩不低;几何成绩低,空间成绩不高。但空间表征与几何能力之间存在着不一致现象。
4. 学生的几何成绩在一定程度上是可以通过其空间表征成绩加以预测。本研究所得的回归方程为: $Y_i = 0.5736X_i + 0.7635$, 预测值与观察值的相关为 $r = 0.420$, $P < 0.001$ 。

参 考 文 献

- [1] 卢仲衡, 关于平面几何“标准图形”教学的消极作用的问题, 心理学报, 1961(2)。
- [2] 卢仲衡、茅子燕等, 教学改革中促进学生掌握数学知识的一些心理因素, 心理学报, 1961(8)。
- [3] 卢仲衡、应玉叶等, 不同教学方法对学生掌握几何基本概念的影响的实验研究, 心理学报, 1963(2)。
- [4] 卢仲衡等, 图形交叉对感知和思维过程的消极影响(I), 心理学报, 1964(1)。
- [5] 李文馥、刘范, 5—11岁儿童两种空间关系认知发展的实验研究, 心理学报, 1982(2)。
- [6] 孟鸿伟、宋和义等, 4—8岁儿童对部分—整体图形知觉发展的实验研究, 心理学报, 1982(2)。
- [7] 何纪全、刘静和等, 关于5—11岁儿童对几何图形的部分与整体关系的认知发展的实验研究, 心理学报, 1983(1)。
- [8] 李文馥、刘范, 5—13岁儿童空间认知发展的研究——判别相等面积的再探, 心理学报, 1983(1)。
- [9] 李文馥, 8—13岁儿童空间表象发展的研究, 心理学报, 1987(1)。
- [10] 徐凡, 幼儿空间表征的初步实验研究, 心理学报, 1989(1)。
- [11] 李文馥、徐凡等, 3—7岁儿童空间表象发展研究——并与8—13岁儿童空间表象特点比较, 心理学报, 1989(4)。
- [12] 克鲁切茨基著, 赵裕春等译, 中小学生学习能力心理学, 教育科学出版社, 1984。
- [13] 全日制六年制小学数学课本6—12册, 北京出版社, 1989。
- [14] J. Eliot & I. M. Smith, An International Directory of Spatial Tests, NFER-NELSON, 1983。

A PRELIMINARY STUDY ON THE CORRELATION OF SPATIAL ABILITY AND GEOMETRICAL ABILITY OF 4- AND 5-GRADE STUDENTS

Xu Fan Shi Jiannong

Institute of Psychology, Academia Sinica

Abstract

In the present study, 117 4-and 5-grade students were tested with spatial test and geometrical test, correlation between the students' performances on these two tests was analysed. The results showed: 1) in general, as well as on the geometrical test, the performances of [the 5-grade students on the spatial test were significantly higher than that of the 4-grade students', but not in all aspects of the spatial test, 2) either in total number of subjects or in 4-and 5-grade separately, the correlations between the performances of the two tests were significant, 3) the performances of students in the research on the geometrical test can be predicted to a certain degree through the regression equation: $\hat{Y} = 0.5736X_1 + 0.7635$.

Key words: spatial representation, spatial ability, geometrical ability, regression equation