

数学领域认知技巧的获得^①

陈会钦

中国科学院心理研究所(北京 100012)

[摘要] 本文详细讨论了在数学领域中认知技巧获得的过程, 其中包括学生的早期数学知识的获得, 数学问题解决技巧的获得, 指出传统的数学教育存在的两个问题: (1) 以正统的符号操作作为教育基础, 忽略了儿童已有的直观知识; (2) 强调将常规的手段- 目的分析作为有关的学习工具, 加大了学生的认知负荷, 针对这些问题介绍了几个通过改进教学方法促进数学认知技巧获得的实践经验, 同时分析了认知技巧获得的社会背景, 包括合作学习、情景定点学习和学徒学习。

关键词 数学领域, 认知技巧

认知技巧是指学会认识客观事物并运用知识解决实际问题的过程。在心理学中, 关于认知技巧获得的研究很多是在数学领域中进行的, 主要涉及学生的早期数学知识的获得, 数学问题解决技巧的获得, 以及认知技巧获得的社会背景等方面。本文将对这几方面的问题进行较系统的评述, 以期对我国当前的数学教育改革起到一定作用。

1 学生的早期数学知识的获得

学前儿童是怎样获得数学知识? 这些知识由什么组成? 又是怎样影响儿童的数学学习的? 这些问题一直是教育学家和心理学家所关心的。一般认为儿童在日常生活中就开始慢慢积累关于数的知识, 他们的数学知识多集中在数上, 即数数和计算方面。

儿童入学前就有了关于量的概念^[1]。它有三种表现形式。第一种是婴儿会说话前的有关量的知识, 表现为婴儿具有一种从数量上比较物体的图式。如6个月的婴儿就能够区别视觉刺激的不同单元数, 且可以再辨认数量相同的单元。婴儿在一定范围内辨认不同单元, 所使用的方法不是通过计算量的绝对大小, 而是通过量的比较。第二种形式是, 随着语言的发展, 逐渐获得大量没有用准确数表达的原量的知识, 如大、小、增加、减少等, 他们利用原量图式的比较对数进行直觉操作^[2]。如3、4岁孩子知道如果在某东西里放入同样的东西, 则它们就会更多, 如果拿走一些则会比原来更少, 而且也知道, 如果不拿走也不放进时, 量和原来的量是一样多的。量的第三种表现形式是部分和整体的原量图式, 即一个物体被分成几部分后, 再放在一起时与原量相同。这一图式使儿童能够判断部分和整体的关系。如当把蛋糕切成几块时, 儿童知道小块的蛋糕与原来的蛋糕性质一样, 并认为它是原蛋糕的一部分且比原蛋

糕小。

虽然原量的知识只是一种比较, 缺乏一定的测量规则, 但儿童的原量推理图式为以后的数学发展提供了基础, 当它与一定的数数技巧结合时, 儿童就会逐渐掌握数系统中的主要原理。随着年龄和经验的生长, 学前儿童最后发展了数数和使用确定量的能力, 如4岁儿童知道将数的名称和实物一对一的配对, 有了数数知识后, 逐渐将数字的顺序和原量的比较图式整合起来, 从而能判断数的大小。进入小学之后, 儿童则根据自己的经验创造出一种计算策略, 刚开始时数实物, 如数手指, 这是加减计算的直接模型, 然后发展为在心里数, 外部表现为有节律地点头或动手指。

虽然学前儿童已具备了大小区别、大小概念、量的增加和减少、部分和整体关系的知识, 有时也具备了数数技巧和计算策略, 但仍有大量学生在数学课堂上学不好, 其原因在于当前学校的数学教育是建立在正统的符号操作上, 而不是有效地建立在儿童已有的直观知识上, 其主要表现为书本中的数字和计算被认为是主要的, 当引入基础概念后, 教学的重点很快转向记忆数字和运用规则的练习中, 而儿童使用的不正式的计算方法常被忽视, 有时甚至被故意地阻止^[2]。因此, 数学教学应建立在直观知识的基础之上, 这一观点已被一项跨文化的比较研究所证实, 日本教师在课堂上只讲2-3个问题, 大量时间花在从各个角度解释原则及其推论上, 而美国教师则花很少时间去解释, 之后让学生多做练习, 强调准确性和速度而不强调理解, 最终的教学效果是日本学生的数学成绩高于美国儿童^[3]。

2 数学问题解决技巧的获得

代数中的应用题是学生入学后遇到的最基本的结构不明问题, 这类问题只给出了初始状态和目标状态, 但使问题得以解决的状态转换的算子却很难找到。因此, 尽管所有的学生都能够对给定问题中的数字进行简单运算, 但当解决应用题时, 他们就很难找到正确的答案。Kouba 等的研究表明, 所有年级学生在解应用题时难以将相关信息和不相关信息区分开来, 他分析有两种原因, 一是有些学生根本没有理解题意就去做, 如只是将题中所有的数字加起来, 它与教科书中加法的泛化有关, 这种泛化是由题中只包含问题求解所必要的数字引起的; 另一个原因是一些学生能理解题却不能辨别哪些是相关数字哪些不是相关数字^[4]。很多老师也抱怨这类问题很难教, 但这类问题却能将数学公式和日常生活中的经验联系起来, 为学生获得数学抽象知识提供了一个更熟悉的情境(如旅游和买东西), 使代数课堂上的训练更好地迁移到以后的教育和日常经验上。

但是, Sweller 发现学生在问题求解技巧没有提高情况下也能够解决问题, 他认为学生所采用的常规的指向目标搜索的启发法, 如手段-目的分析, 阻碍了学生学习掌握问题的主要结构, 即问题图式的获取^[5]。其阻碍原因有两种, 一是与选择性注意有关, 解决问题和图式获取都需要大量的认知过程, 而在手段-目的分析中, 大部分的精力放在消除目标状态和当前状态间的差异, 因此很少注意问题的主要结构; 另一原因是与认知负荷有关, 手段-目的分析中过多的认知负荷阻碍了问题求解中的学习。手段-目的分析中的认知过程多是寻找状态间的差异, 状态与算子之间的关系以及子目标的设立等, 这样, 几乎没有认知空间进行图式获取, 即学会对问题分类和应用特殊规则^[6]。现在的大多数数学教育强调将常规的手段-目的分析作为有关学习工具, 老师一旦解释了原理, 出示了例题, 就要求学生解大量的

习题,在大量的练习中将能解决问题作为一个结果,其中学习可能发生,但没有迹象表明这种方法很有效,所以 Sweller 建议用无特定目标问题或例题来取代常规问题,以减轻认知负荷,加强问题图式的获取。

3 认知技巧获得的社会背景

数学学习不仅受到认知因素的影响,也受到社会因素(如学生参与的团体)的影响。因此认知技巧研究也广泛涉及到社会和文化因素有关的研究,主要包括合作学习、定点情景学习(situated learning)和学徒学习(apprenticeship)。

3.1 合作学习

研究表明,课堂讨论有利于数学证明能力的发展,它不仅培养了学生表述假设和提问的能力,同时也发展了学生为假定策略辩护的能力,最终使学生将数学看成是有关演绎和归纳的过程^[7]。因此,合作学习是提高学习效率的有效途径之一。合作学习的成功与激发反应、产生解释和精细加工及处理矛盾的需要有关,因为社会背景能为个体提供一个动机背景从而使个体产生更多的解释和精细加工^[8]。

认知发展心理学的研究表明5、6岁的儿童在课堂上讨论一个故事利于论证能力的发展,争论也产生了积极的效果;7、8岁的儿童很少在课堂上对没有可能答案的问题的解法提出疑问,但当和同龄人或成人一起学习时,他们则对此类问题有更多的提问和讨论;9岁的儿童在没有老师引导下的讨论有时可以达到比老师在场时还高的认知水平;11岁的学生在计算机辅助下成对解决问题比单个解决问题的成绩好^[9]。Perlmutter 等研究了4-11岁儿童后发现,较大的同龄儿童从相互作用中的受益大于较小儿童,特别在复杂任务上。所有这些研究说明儿童在合作学习过程中更易获得有关解决问题的知识^[10]。

Brown 等观察了老师和学生在课堂上分配专门知识(让学生研究一个子问题,并汇报他们的发现)的条件下有关概念的改变,学生作为老师和研究者及过程的监控者、学生的积极探寻和基本的思维能力等四个因素与课堂学习有关,这些成分构成了学习者的社会背景^[11]。教育研究表明合作学习比竞争学习更有效地提高了学业能力,在一起的有效工作的条件是必须明白共同的任务和目标^[8]。

3.2 定点情景学习

定点情景学习的概念强调认知技巧获取发生时的文化背景,即认为技巧获取和社会文化背景是分不开的。尽管传统上的迁移认为一个背景下的技巧学习可以应用到另一个背景,但这种迁移很难获取。定点情景学习模型认为当一个新的情景为一个反应提供了线索或激活了反应则迁移就会发生。虽然定点情景学习概念包括了一个社会文化成分,但这一观点却与行为主义很接近,因为它假定环境导致了行为。Guberman 和 Greenfield 认为个人和社会背景相互作用的结果是使个体在这一社会背景中构成了具有一定的心理结构心理表征^[12]。

3.3 学徒学习

学徒学习指一个学生在实际活动中由一个专家手把手教的学习方式,包括在特定背景下的学习,它涉及到考察、辅导和实践,并引导学习者建立一个任务的概念模型。当学习者分析整合专家的反馈时,这一模型在引导和实践阶段发展得更加完全,因此学徒学习在特定学习环境中发生了。研究表明,学徒学习中既需要一个参加者比另一个参加者更熟练,而且较

熟练者也必须为问题解决的特殊策略提供解释,并允许较不熟练者参与选择,因此如果没有引导和参与,较不熟练者就不能从相互作用中受益,值得强调的是,学徒学习的优点在年龄上是有局限的,4-5岁的幼儿即使给予了指导和参与的机会,他们似乎也不能从与熟练者的相互作用中受益^[13]。

4 通过改进教学方法促进数学认知技巧的获得

传统的数学教学是建立在正统的符号操作上,而不是有效地建立在儿童已有的直观知识之上;而且教学所强调的手段-目的分析的策略阻碍了知识的获取;同时传统的教学法也没有考虑到学生的认知特点,针对这些问题,许多研究者以理论结合实践,试图改善传统的教学现状并取得了一定的成就。

Schoenfeld认为,在数学教学中,老师的目的不是让学生尽快地去发现答案,或让其熟练地掌握手段-目的分析的策略,而应是让学生用数学法作为认识 and 解决问题的工具^[14]。Vanderbilt的认知技术小组(CTGV)则将理论和技术相结合,编制了一个虚构人物的经历的节目,根据故事内容提出一系列符合真实情况的问题,让一个班或一个组的学生按次序给出详细答案。该项研究表明,此节目在特定领域的计算和一般问题的解决方面的教学的效果都优于传统教学,它能使将抽象的知识与生活中具体的现象结合起来,从而促进了学生的学习^[15]。

中国科学院心理所“儿童数学思维发展”课题组以理论和实践相结合,为数学教学的改革编写了《现代小学数学》教材。这套教材有三个显著的特点,一是将教学内容和儿童的认知特点相结合,二是以“1”为基础揭示小学数学中部分和整体的关系,培养学生从这种关系上去认识数量关系和空间关系的能力,三是强调知识结构的网络化,既注意知识间的纵向联系,又注意知识间的横向沟通,并揭示知识间的逆向转换关系,与使用传统教材(对照班)相比,使用该教材(实验班)的学生在解决问题的方法和思路上更能从整体上把握问题,能看到整体所包含的部分之间的互逆,互补,关联等关系,而且更能应用转化思维来解决复杂的问题^[16]。

朱新明等针对当前中学教学中师生工作负担较重的问题,从信息加工的角度详细分析了学生在考察例题和解决问题中学习代数和几何的认知过程,认为学生在解决问题的同时也获得了规则,并能用新建立的规则指导解题^[6]。他们根据这一观点以及自适应产生式系统设计了一套示例演练教材,让初中学生在数学课堂上以看例题和做习题的方式获取知识和技能。即将有解题步骤的例题和一系列的问题串连成组,使学习通过考察例题、解决问题学习新知识,引导学生由浅入深的学习,直至获得抽象的数学概念和解题技巧,然后提供大量的实际问题让学生去解决。另外教材的练习题旁附有答案,一方面可以减轻学生的认知负荷,另一方面可避免问题的堆积。

参考文献

- [1] Levine SC, Jordan NC. Development of calculation abilities in young children. *J Exper. Child Psychol.*, 1992, 53, 72-103.
- [2] Resnick LB. Developing mathematical knowledge. *Am. Psychologist*, 1989, 44(2): 162-169.

- [3] Stigler JW, Baranes. Culture and mathematics learning. In: Rothkopf E. (ed), Review of Research in Education. Washington DC: Am. Educ. Res. Assoc. 1989.
- [4] Kouba VL, Brown CA, Carpenter TP. Results of the fourth NAEP assessment of mathematics: Number Operations, and Word Problems. Arithmetic Teacher, 1988, 3, 14- 19.
- [5] Sweller J. cognitive load during problem solving: effects on learning. Cogn. Sci., 1988, 12(2): 257- 285.
- [6] Zhu X, Simon HA. Learning mathematics from examples and by doing. Cogn. Instr. 1987, 4(3): 137- 166.
- [7] Lampert M. When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematics knowing and teaching. Am. Educ. Res. J. 1990, 27(1): 29- 63.
- [8] Slavin RE. Developmental and motivational perspectives on cooperative learning a reconciliation. Child Dev. 1987, 58(5): 1161- 1167.
- [9] Voss JF, Wiley J. Acquiring intellectual skills. Annu. Rev. Psychol. 1995, 46, 155- 189.
- [10] Perlmutter M, Behrend SD, Kuo F, Muller A. Social influences on children's problem solving. Dev. Psychol. 1989, 25(5): 744- 754.
- [11] Brown AL, Ash O, Rutherford K, Gordo A, Campione JC. Distributed expertise in the classroom. In: Salomon G (ed), Distributed Cognitions. New York: Cambridge Univ. Press. 1993, 188- 228
- [12] Guberman SR, Greenfield PM. Learning and transfer in everyday cognition. Cogn. Dev. 1991, 6(3): 233- 260.
- [13] Rogott B. Apprenticeship in Thinking: Cognitive Development in Social Context. New York: Oxford Univ. Press. 1990.
- [14] Schoenfield AH. When good teaching leads to bad results: the disasters of "well taught" mathematics classes. Educ. Psychol. 1988, 23(2): 145- 166.
- [15] Cognition and Technology Group at Vanderbilt (CTGV). The Jasper series: the theoretical foundations and data on problem solving and transfer. In: Penner LA, B Atsche GM, Knoff HM, Nelson DL(eds), The Challenge in Mathematics and Science Education. Washington DC: Am. Psychol. Assoc. 1993, 113- 152.
- [16] 张梅玲. 促进儿童数学思维发展, 提高小学生教育素质. 心理科学通讯, 1989, 3, 16- 20.

(上接第 59 页)

- [10] 王登峰, 方林, 左衍涛. 中国人人格的词汇研究. 心理学报, 1995, 27(4): 401- 406.
- [11] Russell J A. In defense of a prototype approach to emotion concepts. Journal of Personality and Social Psychology, 1991, 60, 37- 47.
- [12] Plutchik R. Emotion: A psychoevolutionary synthesis. New York: Harper & Row, 1980.
- [13] War P, Barter J, Brownbridge G. On the independence of positive and negative affect. Journal of Personality and Social Psychology, 1983, 44, 644- 651.
- [14] Watson D. The vicissitudes of mood measurement: Effects of varying descriptors, time frames, and response formats on measures of positive and negative affect. Journal of Personality and Social Psychology, 1988, 55, 128- 141.
- [15] Goldberg L R. An alternative "description of personality": The Big- Five factor structure. Journal of Personality and Social Psychology, 1990, 59, 1216- 1229.