

# 小学数学思维中的

## “变”与“不变”

中国科学院心理研究所 张梅玲

小学生从学习自然数到学习整数,再到学习分数、小数、百分数;从学习四则运算的概念到学会运算;从学习式题计算到解应用题;从认识简单图形到计量其面积、体积……在这一系列数量关系和空间关系中无不充满着数与数、数与形、形与数之间的“变”与“不变”的现象,并且呈现一定的规律。这些现象和规律,是小学数学思维的一个特征。抓住这一特征,对促进学生获取知识、发展思维有十分重要的意义。

### 一、“变”与“不变”中的守恒性

在小学数学四则运算中,加数、减数、因数、除数等可以千变万化。但在一定的条件下,也可以使它们“变”中有“不变”,达到数的守恒性。这种守恒性反映在加法运算中,就是两个加数之间的互补关系。如果要使两个加数变而其总数不变,就必须在一个加数上加上一个数,另一个加数上减去同样数量的一个数,才能使总数不变。例如,  $12+6$ , 其结果是 18。如果要一个加数  $12+3$  变成 15, 那另一个加数 6 必须减去 3, 即  $6-3=3$ 。这样  $15+3$  还是等于 18。

这种守恒性反映在乘法运算中,就是两个因数之间的补偿关系。也就是说,如果要达到因数变而积不变这一目的,那一个因数扩大(或缩小)几倍,另一个因数则必须同时缩小(或扩大)同样的倍数,这样

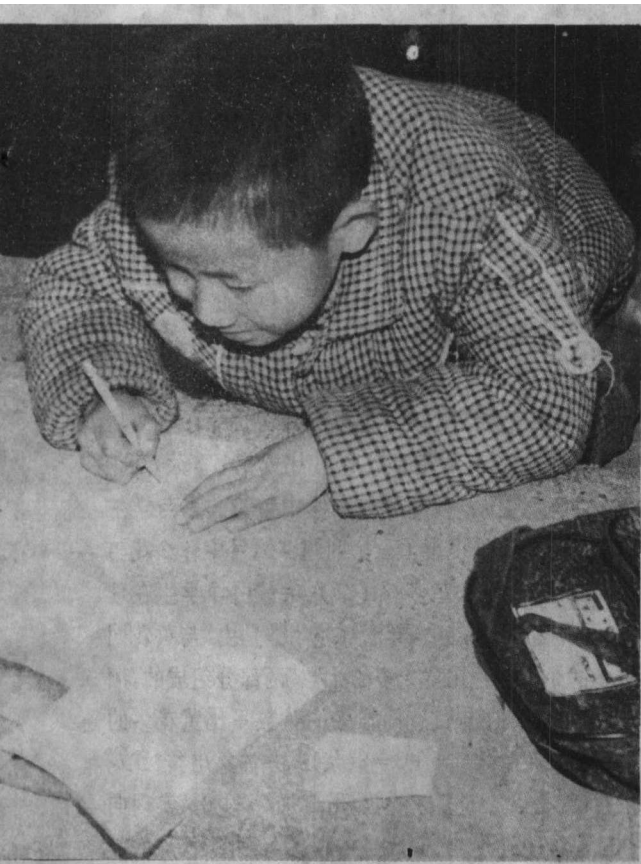
才能使积不变。如:

$$\begin{array}{ccc} 16 & \times & 8 & = & 128 \\ \vdots & & \vdots & & \\ \text{扩大 2 倍} & & \text{缩小 2 倍} & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 32 & \times & 4 & = & 128 \end{array}$$

这种守恒性在几何图形中的反映是“等积变形”。小学生拼玩的七巧板就是“等积变形”的典型例子。把七块不同形状的板,不管如何拼摆成各种不同的形状,其总面积是不变的。根据这个形变面积不变的道理,我们可以采用剪拼的方法把平行四边形、梯形、三角形以及圆转化成为长方形,然后再从长方形面积公式推导出这些图形面积的求法。

这种守恒性也反映在长度、重量、容量等计量知识中。我们可以应用变中有不变的思想去解决一些实际问题。例如,一块布总长不变,单位可以变;又如,根据铜的密度不变这一点,可以从铜的体积推算出其重量,反之,也可以从铜的重量推算其体积。

这种守恒反映在数与数之间转化的过程中,可以使数改变其形态而其实质不变。例如,根据分数的性质,我们可以把  $\frac{1}{2}$  化成  $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{6}$ 、 $\frac{5}{10}$ …… $\frac{50}{100}$ ……。这些分数形态各异,数值却始终没有改变。但这种变化,只有在把  $\frac{1}{2}$  这个分数中的分子和分母乘以同一个非零的数这种条件下才能成立。另外,数学运算中的假分数化成带分数或整数,或者反过来,带分数或



减少都是依存于同一题中另一个数的增加或减少的。也就是说,一个数的变依存于另一个数的变。这就是数与数之间的关联性。“变”与“不变”中,抓住两个数之间的这种关联关系,不仅有利于小学生数学知识的学习,而且有利于他们函数思想的发展。比如,在低年级乘法口诀的教学中有这样的例子:

$$\begin{array}{rcl}
 5 \times 1 & = & 5 \\
 5 \times 2 & = & 10 \\
 5 \times 3 & = & 15 \\
 5 \times 4 & = & 20 \\
 5 \times 5 & = & 25 \\
 5 \times 6 & = & 30 \\
 5 \times 7 & = & 35 \\
 5 \times 8 & = & 40 \\
 5 \times 9 & = & 45 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \text{不变} & \text{变} & \text{变}
 \end{array}$$

教师让学生观察这组算式后,要求他们思考以下三个问题:(1)这一组算式中,什么不变,什么变了?(2)乘数和积是怎样变化的?(3)下一算式中的乘数都比上一算式中的乘数多1,而积是下一个比上一个多5,增加的多少是否一样?这里的三个问题,尤其是第三个问题,就可以使小学生明白乘数1对应的积是1个5,乘数2对应的积是2个5……从而为正比例函数思想的培养作了孕伏。

整数化成假分数;分数化成小数;分数化成百分数;小数化成百分数;繁分数化简;比的化简;名数的化和聚等等,都是数在形式上发生变化,而其值的大小不变。

在教学过程中,教师既要让学生注意到变及不变的规律,同时又要在变中抓不变,促进小学生数和形的守恒性、互补性、补偿性等思维的发展。

### 三、“变”与“不变”中的转换性

## 二、“变”与“不变”中的关联性

在数学解题中,一个数量的变化往往会引起其它数量的变化。如:某班转来2名男生,男生人数变了,总数也就跟着变了,男生与女生、男生与总人数之间的倍数关系也随之变了。在加法运算中,如果一个加数增加(或减少)几,另一个加数不变,它们的和也增加(或减少)几;如果减数增加(或减少)几,被减数不变,它们的差反而减少(或增加)同一个数;在乘法运算中,如果一个因数扩大(或缩小)几倍,另一个因数不变,它们的积也扩大(或缩小)相同的倍数;在除法运算中,如果被除数扩大(或缩小)几倍,除数不变,它们的商也扩大(或缩小)相同的倍数;如果除数扩大(或缩小)几倍,被除数不变,它们的商反而缩小(或扩大)相同的倍数。

在一定条件下,“变”与“不变”具有转换性。例如,数学教学中的一题多解与举一反三就是这种转换的体现。也就是说,题目不变,解法可以有多种,即解题的方法是可以变的。反过来,解法中的较佳思路又可以从“变”转换为“不变”,即可以用这同一种较佳思路来解决一系列同类型的各种题目。又如,在应用题教学中,条件和问题之间的“变”和“不变”也是可以互相转换的。从这个意义上讲,“变”和“不变”也是相对的。

小学数学中“变”与“不变”的规律,学生可以通过观察比较、分析综合、抽象概括等思维活动总结出来。总结的过程也就是学生对数或形的概括、推理能力的培养过程,即数学思维的培养过程。数学思维发展了,解决数学问题的能力也就提高了。

一句话,在四则运算中,和、差、积、商的增加或

(唐晓宁 摄影)